

## Tesis de Posgrado

# Leyes temporales de decaimiento y dinámica transitoria en sistemas hamiltonianos cuasiligados

Sánchez, María José

1994

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias  
Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

**Cita tipo APA:**

Sánchez, María José. (1994). Leyes temporales de decaimiento y dinámica transitoria en sistemas hamiltonianos cuasiligados. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. [http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_2696\\_Sanchez.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2696_Sanchez.pdf)

**Cita tipo Chicago:**

Sánchez, María José. "Leyes temporales de decaimiento y dinámica transitoria en sistemas hamiltonianos cuasiligados". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1994.  
[http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_2696\\_Sanchez.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2696_Sanchez.pdf)

**EXACTAS** UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



**UBA**

Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

**Leyes Temporales de Decaimiento y  
Dinámica Transitoria en Sistemas  
Hamiltonianos Cuasiligados**

Autora

*María José Sánchez*

Director de Tesis

*Alejandro José Fendrik*

-1994-

Tesis presentada para optar al título de Doctor en Ciencias Físicas.

*tesis  
26/6  
EJ 2*

## Resumen

En este trabajo se estudian las leyes de decaimiento para sistemas Hamiltonianos cuasiligados, cuya dinámica transitoria es completamente caótica pero no necesariamente completamente hiperbólica.

En la Introducción efectuamos una revisión de los conceptos fundamentales asociados con estos sistemas, como así también enmarcamos nuestro análisis dentro de los últimos avances relacionados con el estudio de los fenómenos de decaimiento y dispersión caótica.

En el Capítulo 1 introducimos el Pozo de Sinai, sistema que utilizaremos como modelo, estudiando los aspectos más relevantes de su dinámica. El conjunto invariante de este sistema puede ser completamente hiperbólico o incluir un subconjunto de órbitas periódicas parabólicas de acuerdo al valor de un simple parámetro.

El Capítulo 2 constituye el desarrollo de un formalismo novedoso que permite, a través del empleo de propiedades de la teoría ergódica, vincular la ley de decaimiento para un dado sistema Hamiltoniano con distribuciones internas que caracterizan la dinámica. Demostramos la influencia que poseen las distribuciones internas en la ley de decaimiento final, utilizando diferentes distribuciones de prueba, que conducen a comportamientos marcadamente distintos en las leyes de decaimiento. Se estudia numéricamente el decaimiento en el Pozo de Sinai, a partir de una población de equilibrio, mostrando que la ley de decaimiento presenta dos comportamientos bien diferenciados de acuerdo al valor del parámetro mencionado previamente.

El estudio analítico de la ley de decaimiento se realiza en el Capítulo 3, posteriormente al análisis de la relación que existe entre nuestro sistema y el Gas de Lorentz Periódico que resulta ser la versión extendida del billar de Sinai.

El Capítulo 4 está dedicado al estudio del problema de decaimiento en muchas dimensiones, obteniéndose como resultado relevante e inesperado la independencia del

comportamiento a tiempos largos de la ley de decaimiento con el número de dimensiones.

En el Capítulo 5 se efectúa una revisión de los conceptos fundamentales del proceso de dispersión caótica. Empleando un enfoque que permite entender a los procesos de dispersión como procesos de decaimiento en los cuales el espacio de fases se puebla con una distribución particular, extendemos en el Capítulo 6 el formalismo implementado en el Capítulo 2 para encontrar la ley de decaimiento asociada a los procesos de dispersión. En el caso de que el conjunto invariante posea un subconjunto de órbitas periódicas parabólicas, demostramos que la ley de decaimiento a tiempos largos para el problema de dispersión es algebraica difiriendo el exponente en uno con el hallado en el estudio del problema de decaimiento a partir del equilibrio. Así mismo estudiamos la influencia de la estructura interna del conjunto invariante atrapado en los observables característicos de estos procesos como la función de dispersión y la distribución de tiempos de retardo, encontrando en los mismos comportamientos marcadamente distintos dependiendo de que el conjunto invariante sea o no completamente hiperbólico.

# Indice

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1 El Sistema</b>	<b>7</b>
1.1 El Pozo Cuadrado Bidimensional . . . . .	7
1.2 El Pozo de Sinai . . . . .	10
<b>2 Leyes Temporales de Decaimiento</b>	<b>13</b>
2.1 Estudio Numérico del Decaimiento . . . . .	13
2.2 Leyes Temporales y Dinámica interna . . . . .	14
2.3 Distribuciones Prueba . . . . .	17
2.3.1 Función Escalón . . . . .	17
2.3.2 Función Escalonada Geométrica . . . . .	18
2.3.3 Función Exponencial . . . . .	19
2.3.4 Función Escalonada Algebraica . . . . .	19
<b>3 Decaimiento para el Pozo de Sinai en <math>D=2</math></b>	<b>22</b>
3.1 El Gas de Lorentz Periódico . . . . .	22
3.2 Corredores en el Gas de Lorentz con Horizonte Infinito . . . . .	24
3.3 Relación entre $C(t)$ y $g(t)$ . . . . .	25
3.4 Corredores y Órbitas Periódicas Parabólicas . . . . .	27

3.5	La Ley de Decaimiento y las Órbitas Periódicas Parabólicas . . . . .	28
3.6	Estudio Analítico del Comportamiento a Tiempos Largos de $g(t)$ . . .	32
<b>4</b>	<b>El Decaimiento en <math>D</math> Dimensiones</b>	<b>37</b>
4.1	El Pozo de Sinai en $D$ dimensiones . . . . .	37
4.2	Estudio Numérico del Decaimiento en $D$ Dimensiones . . . . .	39
4.3	Estudio Teórico . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Dispersión caótica</b>	<b>46</b>
5.1	Preliminares . . . . .	47
5.2	Ejemplos Físicos . . . . .	52
<b>6</b>	<b>La Dispersión Caótica no Hiperbólica</b>	<b>54</b>
6.1	La Dispersión Caótica en el Pozo de Sinai. . . . .	55
6.2	La Dispersión Caótica como un Proceso de Decaimiento. . . . .	59
	<b>Conclusiones</b>	<b>64</b>
<b>A</b>	<b>Relación entre <math>g(t)</math> y <math>f(t)</math>.</b>	<b>69</b>
<b>B</b>	<b>Obtención de <math>\omega_D</math>.</b>	<b>72</b>
	<b>Figuras correspondientes a los Capítulos 1 y 2.</b>	<b>74</b>
	<b>Figuras correspondientes a los Capítulos 3 y 4.</b>	<b>80</b>
	<b>Figuras correspondientes a los Capítulos 5 y 6.</b>	<b>91</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>99</b>

textos de dinámica no lineal que abordan el tema desde enfoques muy rigurosos (ver por ejemplo [1, 2]). Creemos que para el desarrollo de este trabajo alcanza con enfatizar algunos conceptos básicos que resultarán relevantes para una mejor comprensión del mismo. Aquí adaptaremos a los sistemas Hamiltonianos, la definición de sistema caótico que se da en el libro de Wiggins [1], con una pequeña modificación referente a la estabilidad del conjunto invariante.

Un sistema que manifiesta sensibilidad a las condiciones iniciales en un conjunto cerrado invariante  $\Lambda$  se denomina caótico. El conjunto invariante está conformado por un número infinito de órbitas periódicas con períodos arbitrariamente grandes.

La definición anterior se aparta levemente de la formulada por Wiggins en la que las órbitas periódicas atrapadas son todas inestables.

Nosotros diremos que en caso de que se satisfaga esta última condición, o sea que el conjunto  $\Lambda$  sea completamente hiperbólico, el sistema presenta **caos duro**. El mecanismo de Smale, el cual se discute ampliamente en las referencias citadas, genera el mapa prototipo cuyo conjunto invariante resulta completamente hiperbólico. Este conjunto invariante posee estructura fractal, medida de Lebesgue cero y es un conjunto de Cantor.

Por otra parte, una gran cantidad de sistemas Hamiltonianos investigados en la literatura poseen **dinámica mixta**, o sea un espacio de fases en el cual coexisten regiones regulares (islas de estabilidad) inmersas en un mar caótico. El mapa standar es el paradigma de esta clase de sistemas [3]. Claramente aquí el conjunto invariante no posee medida nula (debido al área finita de las regiones de estabilidad).

Como tercera categoría se encuentran aquellos sistemas que siendo **completamente caóticos** (no presentan regiones regulares) no exhiben caos duro, ya que el conjunto invariante no es completamente hiperbólico. En otras palabras, el conjunto atrapado posee además de órbitas periódicas inestables un subconjunto de órbitas periódicas parabólicas (levemente inestables pero no aisladas) [4].

Del análisis anterior se desprende, que una forma de clasificar el grado de “caoticidad” de un sistema es a través de la estructura del conjunto invariante. La misma muestra características diferentes según corresponda a un sistema que presenta caos duro, dinámica mixta o es completamente caótico pero no completamente hiperbólico.

El estudio del conjunto invariante de órbitas atrapadas resulta de gran relevancia cuando en un sistema Hamiltoniano se pueden desarrollar mecanismos que permiten la eliminación de puntos del espacio de fases de una dada región de interés, ya que el conjunto invariante corresponderá a aquellos puntos cuyas vidas medias resultan infinitas. Es por esta razón que en la literatura se conoce al conjunto invariante como **repelot caótico**, ya que todas las trayectorias finalmente escapan de su vecindad. Los mecanismos de escape se generan por ejemplo en los procesos de dispersión [5], disociación o decaimiento espontáneo [6].

Una vez entendidas las características fundamentales del conjunto invariante atrapado, definiremos un sistema cuasiligado como aquel tal que su dinámica puede estar restringida temporalmente a una región del espacio de fases en la cual existe un conjunto infinito de órbitas periódicas inestables, para luego manifestar un comportamiento no ligado. La transición entre el movimiento ligado y el no ligado es lo que definimos como el proceso de decaimiento.

En un sistema integrable las constantes de movimiento establecen barreras que restringen la dinámica a regiones definidas del espacio de fases no existiendo ningún mecanismo de transporte que permita la transición del movimiento ligado al no ligado.

Los trabajos hasta ahora realizados en el marco del análisis de los procesos de decaimiento en sistemas caóticos se basan generalmente en el estudio del conjunto invariante. En otras palabras se infieren propiedades del tipo de ley de decaimiento observada o posible de ser observada a través del estudio de la estructura de la región atrapada del espacio de fases [7, 8, 9].



Una de las dificultades mayores que presenta este análisis es que exige, ya sea el conocimiento detallado del conjunto invariante o el generar un modelo que permita describirlo.

Queda claro que resultaría interesante invertir el enfoque anterior, y ésto es parte de lo que haremos en el presente trabajo. El vincular la ley de decaimiento con distribuciones que dependen de la dinámica interna, nos permitirá inferir información sobre la estructura del espacio de fases a partir de la observación de la ley de decaimiento asociada.

En un trabajo del año 1990 Bauer y Bertsh [6] concluyeron, a partir de simulaciones numéricas desarrolladas sobre un sistema cuya dinámica podía variar de regular a caótica (no mixta), dependiendo de la elección de un parámetro de control, que una ley de decaimiento puramente exponencial estaba relacionada con el régimen caótico, mientras que una ley algebraica de decaimiento se obtenía cuando la dinámica era regular. El decaimiento en el sistema anterior se efectúa a través de un orificio en el espacio de configuraciones (son billares con una pequeña ventana) que permite el pasaje de partículas de la región ligada al exterior (no ligada). Si bien este trabajo significó la primera aproximación a la idea de clasificar el grado de no integrabilidad de un sistema a través de su ley de decaimiento, poco tiempo después se demostró que la observación anterior no era concluyente, en el sentido de que la vinculación entre ley de decaimiento y tipo de dinámica no resultó unívoca. A modo de ejemplo en la referencia [10] se encontró para el billar circular una ley de decaimiento exponencial siendo este sistema completamente regular.

Por otra parte, en el trabajo de Hillermeier *et al.* del año 1992 [9] se estudió el decaimiento de un sistema caótico en el que se probó analíticamente la no existencia de islas de estabilidad y se encontró una ley algebraica de decaimiento. Ésto resultó concluyente para demostrar la existencia de sistemas completamente caóticos (o sea que no poseen dinámica mixta) cuyas leyes de decaimiento pueden ser no exponen-

ciales.

Como demostraremos en nuestro trabajo, el comportamiento exponencial de la ley de decaimiento estará vinculado al carácter hiperbólico del conjunto invariante de órbitas periódicas, mientras que para sistemas completamente caóticos, pero no completamente hiperbólicos, la ley de decaimiento manifestará una transición de exponencial a algebraica para tiempos largos.

Como se mencionó previamente, entendemos el decaimiento como la transición entre dinámica ligada-no ligada. Esto nos permitirá englobar a los fenómenos de decaimiento espontáneo y de dispersión caótica como procesos que difieren esencialmente en la forma de poblar inicialmente el espacio de fases. Si bien esta observación fue efectuada originalmente por Pikovsky [11], en el presente trabajo se formalizará cuantitativamente la relación entre ambos fenómenos.

El sistema que elegimos como modelo para nuestro estudio es el Pozo de Sinai, que presenta gran analogía con el billar del mismo nombre [12]. El conjunto invariante atrapado de nuestro sistema coincide con el del billar, habiéndose probado formalmente para éste las propiedades de ergodicidad y mezclado (*mixing*) que caracterizan a los sistemas completamente caóticos.

El Capítulo 1 está dedicado a una descripción exhaustiva de la dinámica en el Pozo de Sinai, razón por la cual aquí nos detendremos únicamente en la descripción de las características del conjunto invariante. Éste puede ser completamente hiperbólico (todas sus órbitas periódicas resultan inestables y aisladas) o puede poseer un subconjunto parabólico de órbitas periódicas no aisladas de acuerdo al valor de un simple parámetro de control. En el primer caso la ley de decaimiento será exponencial, mientras que en el segundo manifestará la transición mencionada de exponencial a algebraica para tiempos largos.

Si bien existen numerosos fenómenos físicos en los cuales el billar de Sinai puede emplearse como modelo simple para describirlos (por ejemplo nucleones a bajas energías

confinados dentro de un núcleo en donde el movimiento está gobernado por el potencial obtenido en la aproximación de campo medio), en el último par de años el estudio teórico de la dinámica en este tipo de billares ha adquirido relevancia para las aplicaciones experimentales.

A modo de ejemplo y para concluir con la presente introducción mencionaremos que dentro de la física de materia condensada, recientemente, se han llevado a cabo experimentos sobre medición de conductancia en microestructuras de conductores mesoscópicos [13]. Bajo ciertos regímenes estos conductores pueden ser considerados como balísticos (se desprecian las colisiones con las impurezas del material en comparación con las colisiones con la propia microestructura) y son modelados por billares con una geometría regular (por ejemplo una cavidad cuadrada o circular). Cuando las cavidades son dopadas con impurezas y bajo cierta geometría, éstas pueden ser representadas por un billar como el Sinai, siendo la dinámica asociada caótica. Al inyectar partículas dentro de la cavidad, las partículas rebotan elásticamente dentro de la misma para finalmente escapar. Este es un típico ejemplo de un proceso de dispersión. En el caso de que la dinámica interna sea caótica corresponderá al fenómeno de **dispersión caótica** que estudiaremos en detalle en el Capítulo 5 de este trabajo. Bajo ciertas condiciones, el tiempo de escape puede ser considerado una cantidad puramente clásica que puede obtenerse por simulaciones de las ecuaciones de movimiento [14]. La distribución de tiempos de escape para las diferentes partículas se mide experimentalmente y manifiesta características marcadamente diferentes dependiendo si la dinámica en la cavidad es regular (sin impurezas) o caótica (con impurezas). La medición de conductancia en la microestructura es sensible a la distribución de tiempos de escape, mostrando que un proceso de dispersión caótica clásico tiene consecuencias experimentalmente medibles.

# Capítulo 1

## El Sistema

Este capítulo estará dedicado al análisis del sistema que elegimos como modelo y a la dinámica asociada.

En la primera sección comenzaremos efectuando una breve descripción del pozo cuadrado en dos dimensiones para luego abocarnos al estudio del Pozo de Sinai.

### 1.1 El Pozo Cuadrado Bidimensional

Consideremos una partícula puntual de masa unidad en un pozo de potencial cuadrado bidimensional. Sean  $-V_0$  ( $V_0 > 0$ ) y  $a$  la profundidad y ancho del pozo respectivamente. De acuerdo al valor de la energía  $E = p^2/2 - V_0$  distinguiremos tres tipos de movimientos posibles :

a)  $E < 0$ .

El movimiento es ligado, permaneciendo la partícula atrapada dentro del pozo. La dinámica es la de una partícula dentro de una caja cuadrada rebotando elásticamente en las paredes. En este caso el sistema se comporta como un billar.

b)  $0 \leq E \leq V_0$ .

Como veremos en este caso, a diferencia de lo que sucede para sistemas de un grado de libertad, la condición  $E > 0$  resulta ser necesaria pero no suficiente para tener movimiento no ligado. A los efectos de establecer la condición accesoria que se debe satisfacer para que el movimiento resulte no ligado, consideremos ahora el potencial  $V(x, y)$  definido por:

$$V(x, y) = \begin{cases} -V_0 & \text{si } x \geq 0 \text{ y } y \geq 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

y supongamos que la partícula incide desde la región *I* y arriba a  $x = 0$  en el punto *A* formando un ángulo  $\psi_i$  con la normal  $\hat{n}$  en *A* ( ver fig. 1). Estableceremos bajo qué condiciones la partícula puede acceder a la región *II* utilizando la conservación de la energía y de la componente  $p_y$  del momento (dado que no existen fuerzas aplicadas en esa dirección). Por lo tanto se verifican las siguientes igualdades

$$E_I = E_{II} = E, \quad (1.1)$$

esto es

$$\frac{p_I^2}{2} - V_0 = \frac{p_{II}^2}{2} = E, \quad (1.2)$$

y

$$p_I \sin \psi_i = p_{II} \sin \alpha, \quad (1.3)$$

De lo anterior se deduce que  $p_{II} < p_I$  y por lo tanto  $\psi_i < \alpha$ . Dado que el máximo valor de  $\alpha$  es  $\pi/2$ , para una dada energía existe una cota superior para el valor de  $\psi_i$  que resulta compatible con las condiciones (1.2) y (1.3) y que denominaremos  $\psi_{lim}$ . Por lo tanto en estas condiciones de la relación (1.3) obtenemos

$$\sin \psi_{lim} = \frac{p_{II}}{p_I}, \quad (1.4)$$

implicando la relación (1.2) la definición

$$\sin \psi_{lim} = \frac{1}{\sqrt{1 + V_0/E}} . \quad (1.5)$$

Si  $\psi_i > \psi_{lim}$ , esto es

$$\frac{|p_{Iy}|}{p_I} > \sin \psi_{lim} , \quad (1.6)$$

la partícula es perfectamente reflejada y no puede penetrar en la región II.

Todo este análisis es análogo al efectuado en óptica geométrica para determinar la condición de reflexión total en la interfase de dos medios materiales con distinto índice de refracción.

En caso que la partícula haya sido reflejada en  $A$ , supongamos que ahora arriba a el punto  $B$  situado en  $y = 0$  (ver fig. 2). Evidentemente para obtener una segunda reflexión necesitamos que se satisfaga la siguiente relación

$$\frac{|p_{Ix}|}{p_I} > \sin \psi_{lim} . \quad (1.7)$$

Las dos relaciones precedentes pueden agruparse en la siguiente

$$\frac{|p_i|}{p} > \sin \psi_{lim} \quad (1.8)$$

siendo  $i = x, y$  las dos componentes cartesianas del momento  $\vec{p}$ .

La relación (1.8) es la condición accesoria que determina el movimiento ligado dentro del pozo cuadrado aún cuando la energía total de la partícula sea mayor que cero.

Notar que la condición  $E \leq V_0$  es necesaria de forma de que  $\psi_{lim}$  resulte menor que  $\pi/4$  y puedan satisfacerse las relaciones (1.6) y (1.7) simultáneamente. En caso de no satisfacerse alguna de ellas la partícula abandonará el pozo a lo sumo en dos rebotes.

Teniendo en cuenta que  $p = p_I = \sqrt{2(E + V_0)}$  de la relación (1.6) obtenemos

$$p_y^2/2 > E . \quad (1.9)$$

Por otra parte, de (1.7) obtenemos

$$p_x^2/2 > E , \quad (1.10)$$

pero  $E = (p_x^2 + p_y^2)/2 - V_0$  lo cual implica que

$$\begin{aligned} p_x^2/2 &< V_0 , \\ p_y^2/2 &< V_0 . \end{aligned} \quad (1.11)$$

La conservación de  $|p_i|$  mientras la dinámica es análoga a la de un billar implica una distribución de energía inalterable entre los dos grados de libertad del sistema de forma que si se satisface la relación (1.11) el movimiento es siempre ligado aún cuando  $E > 0$ .

c)  $E > V_0$ .

El movimiento es no ligado.

En nuestro estudio nos restringiremos al caso b).

## 1.2 El Pozo de Sinai

Como se señaló al concluir la sección anterior la conservación del módulo de las componentes del momento  $\vec{p}$  establece una distribución de energía fija entre los dos grados de libertad. Esto introduce en el espacio de fases dos regiones disjuntas, una correspondiente al movimiento ligado (billar) y la otra al movimiento no ligado (región libre). Un punto del espacio de fases que se encuentre en la región libre/billar permanecerá siempre en esa región para una dada energía, siendo esta propiedad característica de

los sistemas integrables.

La idea es generar algún mecanismo que permita el pasaje de puntos del espacio de fases de una región a otra, en particular de la región de billar a la región libre. En otros términos permitir la redistribución de la energía entre los dos grados de libertad de forma que la condición (1.8) pueda llegar a no satisfacerse, produciéndose el decaimiento.

Una forma de proveer el mecanismo de redistribución de la energía es colocando en el centro geométrico del pozo cuadrado una barrera circular infinita de radio  $R < a/2$ . Esto elimina la condición  $|p_i| = \text{cte}$ , en otras palabras la condición (1.8) puede dejar de satisfacerse luego de cada colisión con el centro dispersor circular. Como resultado del choque existe una redistribución de la energía entre los dos grados de libertad que podría llegar a generar una transición desde la región de billar a la región libre.

Nuestra partícula dentro del pozo puede interpretarse como una versión simplificada de un núcleo compuesto que teniendo suficiente energía disponible para decaer no lo hace hasta que su energía haya sido convenientemente redistribuida.

Al sistema descrito lo denominamos Pozo de Sinai, por su analogía con el Billar de Sinai [12] en donde el pozo cuadrado es infinito, o sea representa un billar real.

Para todo nuestro análisis consideraremos  $a$  (lado del pozo cuadrado) como unidad de longitud. Teniendo en cuenta que  $\sqrt{2(E + V_0)}$  es el módulo de la velocidad dado que la masa es uno, el cociente  $a/\sqrt{2(E + V_0)}$  tiene unidades de tiempo, por lo tanto podemos tomarlo como la unidad de tiempo de modo que la única dependencia con la energía  $E$  es a través de la condición (1.5). Esta elección implica  $|\vec{p}| = 1$  sin pérdida de generalidad.

Para el estudio de la dinámica las secciones de Poincarè [1, 2] son muy útiles ya que los límites entre la región de billar y de movimiento libre son líneas rectas definidas por el valor de  $\sin \psi_{lim}$  (1.5). Como es usual para billares [15, 16] se grafica un punto en la sección cada vez que la partícula choca contra el contorno del billar. La or-



denada es el valor de la velocidad tangencial  $v_t = \cos\theta$  y la abscisa la distancia  $l$  sobre el contorno medida en sentido antihorario desde algún origen que se toma como referencia (por ejemplo un vértice del cuadrado) hasta el punto correspondiente al rebote. Cuando el sistema representa un billar real ( $V_0 \rightarrow \infty$  ó  $E < 0$ ) la dinámica puede ser descrita por una mapa conservativo sobre el cilindro (definido por  $v_t$  y  $l$ ), pero cuando  $V_0$  es finito existirán puntos mapeados desde la región de billar a la región libre escapando las trayectorias asociadas hacia el infinito.

El sistema estudiado presenta estrecha conexión con los billares con agujeros en los contornos (en especial con el sistema estudiado en [6]), esto es en el espacio de configuraciones, a través de los cuales las partículas pueden escapar del billar.

En nuestro caso la condición (1.8) introduce agujeros en el espacio de momentos. La fig. 3 muestra el espacio de momentos y los mencionados agujeros. El momento de la partícula está representado por un punto en la circunferencia de radio unidad (recordar que  $|\vec{p}| = 1$ ). En este espacio, las colisiones con el centro dispersor pueden ser vistas como un mapa de la circunferencia sobre si misma. Si un punto en la circunferencia es mapeado tal que su momento final cae en un agujero (esto es  $|p_x|$  o  $|p_y|$  menores que  $\sin\psi_{lim}$ ) la partícula abandonará la región de billar.

Dado que el Billar de Sinai es completamente ergódico y caótico [12], es de esperar que en nuestro sistema para un conjunto de condiciones iniciales en la región de billar la medida de Lebesgue (longitud) del conjunto asintóticamente invariante sea cero aún cuando son introducidos los agujeros en el espacio de momentos.

valor particular  $R_c$  del radio del dispersor circular que los separa. En un caso, cuando  $R > R_c$ , el decaimiento es exponencial  $\exp -\lambda t$  para todo tiempo, mientras que en el segundo caso, para  $R < R_c$ , el decaimiento es exponencial para tiempos cortos y presenta un comportamiento algebraico, ésto es  $\sim 1/t^\gamma$  con  $\gamma = 1$ , para  $t \rightarrow \infty$ .

La fig. 5 muestra los exponentes  $\lambda$  obtenidos a través del mejor ajuste exponencial como función de  $R$ . Para  $R < R_c$  se ajustó únicamente la parte correspondiente al comportamiento exponencial inicial.

## 2.2 Leyes Temporales y Dinámica interna

El objetivo principal de esta sección es obtener la ley temporal de decaimiento en término de distribuciones características de la dinámica interna del sistema. Supongamos que inicialmente tenemos  $N_0$  partículas distribuidas de acuerdo a la distribución microcanónica en la región de billar. Sea  $n(t) = -dN/dt$  el número de partículas que abandona el pozo en un intervalo de tiempo entre  $t$  y  $t + dt$ . Sin pérdida de generalidad podemos escribir

$$n(t) = n_1(t) + n_2(t) + n_3(t) \dots, \quad (2.1)$$

donde  $n_i(t)$  es el número de partículas que abandona el pozo después de  $i$  rebotes contra el centro dispersor.

Así mismo definimos  $w < 1$  como la probabilidad de que una partícula transite de la región de billar a la región libre luego de una colisión con el centro circular. Podemos evaluarla usando la teoría ergódica como el cociente entre todas las orientaciones del momento en la región libre y todas las orientaciones posibles del momento.

$$w = \frac{4\psi_{lim}}{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi} \times 4 \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + V_0/E}} . \quad (2.2)$$

Definiremos a continuación dos distribuciones que serán características de la dinámica interna del sistema.

La distribución  $g(t)dt$  representa la fracción de partículas cuya primera colisión con el centro dispersor ocurre entre  $t$  y  $t+dt$  y la distribución  $f(t)dt$  corresponde a la fracción de partículas cuyo tiempo entre dos colisiones sucesivas con el centro dispersor está entre  $t$  y  $t+dt$ . Esta última distribución es equivalente a la distribución de camino libre dado que  $|\vec{p}| = \text{const.}$ .

A partir de las definiciones precedentes podemos escribir

$$\begin{aligned} n_1(t) &= N_0 w g(t) \\ n_2(t) &= N_0 (1-w) w \int_{t^{(1)}=0}^t g(t^{(1)}) f(t - t^{(1)}) dt^{(1)} \\ n_3(t) &= N_0 (1-w)^2 w \int_{t^{(2)}=0}^t \int_{t^{(1)}=0}^{t^{(2)}} g(t^{(1)}) f(t^{(2)} - t^{(1)}) f(t - t^{(2)}) dt^{(1)} dt^{(2)} \\ n_i(t) &= N_0 (1-w)^{i-1} w \int_{t^{(i-1)}=0}^t \int_{t^{(i-2)}=0}^{t^{(i-1)}} \cdots \int_{t^{(1)}=0}^{t^{(i-1)}} \\ &\quad \times g(t^{(1)}) f(t^{(2)} - t^{(1)}) f(t^{(3)} - t^{(2)}) \cdots f(t - t^{(i-1)}) \prod_{j=1}^{i-1} dt^j . \end{aligned} \quad (2.3)$$

Si a la expresión anterior le calculamos su transformada de Laplace, empleando la notación  $\mathcal{L}[n(t)] = \hat{n}(s)$  obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{n}(s) &= \hat{n}_1(s) + \hat{n}_2(s) + \hat{n}_3(s) + \cdots \\ &= N_0 w \hat{g}(s) (1 + (1-w)\hat{f}(s) + (1-w)^2(\hat{f}(s))^2 + \cdots) \\ &= \frac{N_0 w \hat{g}(s)}{1 - (1-w)\hat{f}(s)} . \end{aligned} \quad (2.4)$$

Definiendo por comodidad

$$Q(t) = 1 - N(t)/N_0 \quad (2.5)$$

obtenemos

$$\hat{Q}(s) = \frac{w\hat{g}(s)/s}{1 - (1 - w)\hat{f}(s)} , \quad (2.6)$$

teniendo en cuenta que en nuestro sistema se verifica (ver Apéndice A)

$$dg/dt = -g(0)f(t) , \quad (2.7)$$

de tal forma que

$$\hat{f}(s) = 1 - s\hat{g}(s)/g(0) , \quad (2.8)$$

finalmente obtenemos

$$\hat{Q}(s) = \frac{w\hat{g}(s)/s}{1 + (1 - w)[\hat{g}(s)s/g(0) - 1]} . \quad (2.9)$$

Por lo tanto para conocer  $Q(t)$ , tendremos que antitransformar (2.9).

Antes de concluir esta sección realizaremos algunos comentarios acerca de las hipótesis involucradas en las relaciones (2.3). Al escribir las convoluciones entre las distribuciones  $g(t)dt$  y  $f(t)dt$  estamos suponiendo que para todo tiempo (incluso tiempos cortos) la distribución  $f(t)$  es función únicamente del intervalo de tiempo transcurrido entre dos choques sucesivos, en otras palabras postulamos que existe pérdida instantánea de memoria después de cada colisión con el centro dispersor. Más adelante volveremos sobre este punto al estimar el grado de dependencia con esta suposición de nuestros resultados finales.

## 2.3 Distribuciones Prueba

De forma de establecer las características relevantes de las distribuciones internas con respecto a la ley de decaimiento, efectuaremos un cálculo explícito de (2.9) utilizando cuatro distribuciones prueba  $g(t)$ , tres de las cuales conducen a funciones antitransformadas de Laplace  $Q(t)$  bien conocidas.

### 2.3.1 Función Escalón

Supongamos que  $g(t)$  es una función escalón.

$$g(t) = \frac{[u(t) - u(t - T_0)]}{T_0}, \quad (2.10)$$

siendo  $u(t)$  la función de Heaviside y  $T_0$  su ancho. La distribución propuesta implica que para  $0 < t < T_0$  la tasa de colisiones es constante, mientras que en  $t = T_0$  todas las partículas colisionaron con el centro dispersor. A partir de la relación (2.7) obtenemos la función  $f(t)$  para la distribución  $g(t)$  propuesta:

$$f(t) = \delta(t - T_0) \quad (2.11)$$

esto es la función delta, o sea que el tiempo entre dos colisiones sucesivas es constante e igual a  $T_0$  para todas las partículas. Por lo tanto en este caso el tiempo medio entre colisiones es igual a  $T_0$ .

Las distribuciones anteriores conducen a

$$\hat{Q}(s) = \left( \frac{w}{T_0 s^2} \right) \frac{(\exp(T_0 s) - 1)}{[\exp(T_0 s) - (1 - w)]} \quad (2.12)$$

a partir de lo cual

$$Q(t) = \frac{w}{T_0} \int_0^t (1 - w)^{[t'/T_0]} dt', \quad (2.13)$$

siendo  $[t'/T_0]$  la parte entera de  $t'/T_0$ . Por lo tanto denominando  $n = [t/T_0]$ , obtenemos

$$Q(t) = w \sum_{j=1}^n (1-w)^{(j-1)}, \quad (2.14)$$

y efectuando la suma encontramos

$$\begin{aligned} Q(t) &= 1 - (1-w)^n \\ &\sim 1 - \exp \left[ \frac{\ln(1-w)}{T_0} \times t \right], \end{aligned} \quad (2.15)$$

donde utilizando (2.5) se llega a

$$\frac{N(t)}{N_0} = \exp \left[ \frac{\ln(1-w)}{T_0} \times t \right]. \quad (2.16)$$

### 2.3.2 Función Escalonada Geométrica

Aquí supondremos que  $g(t)$  es una serie de funciones escalón cuyas alturas decrecen geométricamente.

$$g(t) = C \sum_{j=1}^{\infty} a_0^{j-1} \{u[t - (j-1)T_0] - u(t - jT_0)\}, \quad (2.17)$$

con  $C = (1 - a_0)/T_0$  y  $a_0 < 1$ .

En el caso presente obtenemos

$$\hat{Q}(s) = \left[ \frac{w(1-a_0)}{T_0 s^2} \right] \frac{(\exp(T_0 s) - 1)}{\{\exp(T_0 s) - [1 - w(1-a_0)]\}}. \quad (2.18)$$

Por lo tanto, usando los resultados precedentes llegamos a

$$\begin{aligned} \frac{N(t)}{N_0} &= [1 - w(1-a_0)]^n \\ &= \exp \left[ \frac{\ln[1 - w(1-a_0)]}{T_0} \times t \right]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

### 2.3.3 Función Exponencial

En este caso proponemos que  $g(t)$  sea una función exponencial

$$g(t) = \frac{1}{T_0} \exp(-t/T_0) , \quad (2.20)$$

Es fácil comprobar que  $T_0$  es el tiempo medio entre colisiones. Transformando Laplace y sustituyendo la expresión anterior en (2.9) obtenemos,

$$\hat{Q}(s) = \left( \frac{w}{T_0 s} \right) \frac{1}{(1 + w/T_0)} \quad (2.21)$$

y

$$\frac{N(t)}{N_0} = \exp(-wt/T_0) . \quad (2.22)$$

### 2.3.4 Función Escalonada Algebraica

Para concluir con nuestro análisis proponemos que ahora  $g(t)$  sea una serie de funciones escalón donde las alturas de los escalones decrecen de acuerdo a una ley algebraica,

$$g(t) = \frac{1}{T_0 \zeta(\gamma)} \sum_{j=1}^{\infty} (1/j)^\gamma \{u[t - (j-1)T_0] - u(t - jT_0)\} . \quad (2.23)$$

Aquí,  $\zeta(\gamma) \equiv \sum_{j=1}^{\infty} 1/j^\gamma$  es la función de Riemann. Por lo tanto obtenemos

$$\hat{Q}(s) = \left( \frac{w}{T_0 \zeta(\gamma) s^2} \right) \frac{[1 - \exp(-T_0 s)] \Sigma \exp(T_0 s)}{\{1 + (1 - w)[(1 - \exp(-T_0 s)) \Sigma \exp(T_0 s) - 1]\}} , \quad (2.24)$$

donde  $\Sigma \equiv \sum_{j=1}^{\infty} \exp(-T_0 s j)/j^\gamma$ . La antitransformada de Laplace de (2.24) no es analítica, por lo que deberemos antitransformar numéricamente. Comenzaremos estudiando el comportamiento para tiempos cortos, tomando el límite  $t \rightarrow 0$  ( $s \rightarrow \infty$ ).

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\exp(-T_0 s j)}{j^\gamma} \sim \exp(-T_0 s), \quad (2.25)$$

por lo tanto bajo este límite (2.24) se transforma en

$$\hat{Q}(s) \sim \left( \frac{w}{\zeta(\gamma) T_0 s^2} \right) \frac{[\exp(T_0 s) - 1]}{[\exp(T_0 s) - (1 - w)]} \quad (2.26)$$

y

$$\frac{N(t)}{N_0} \sim \exp \left[ \frac{\ln(1 - w)}{T_0} \times t \right], \quad (2.27)$$

esto es un decaimiento exponencial.

Con el objeto de estudiar el comportamiento para tiempos largos tomamos el límite  $t \rightarrow \infty$  ( $s \rightarrow 0$ ). Por razones que quedarán justificadas más adelante, nos restringiremos a  $\gamma = n$  enteros mayores o iguales que 2. Para comenzar, reemplazamos la suma  $\Sigma$  por la integral

$$E_n(T_0 s) = \int_1^{\infty} \frac{\exp(-T_0 s x)}{x^n} dx \quad (2.28)$$

y usando la identidad [17]

$$E_n(z) = \frac{1}{(n-1)} [\exp(-z) - z E_{n-1}(z)] \quad (2.29)$$

en el numerador y denominador de (2.24) obtenemos para el límite  $s \rightarrow 0$ ,

$$\hat{Q}(s) \sim \frac{T_0}{\zeta(n) s(n-1)} \left[ \frac{1}{T_0} - s \exp(T_0 s) E_{n-1}(T_0 s) \right]. \quad (2.30)$$

La expresión anterior conduce a

$$\frac{N(t)}{N_0} \sim \frac{T_0^{(n-1)}}{(t + T_0)^{(n-1)}}, \quad (2.31)$$

o sea una ley de decaimiento algebraica.

De lo expuesto anteriormente concluimos que las distribuciones  $g(t)$  que decrecen exponencialmente o más rápido conducen a leyes de decaimiento exponenciales, mientras que las distribuciones  $g(t)$  que decrecen algebraicamente dan lugar a leyes de



decaimiento que manifiestan para tiempos cortos un comportamiento exponencial que se transforma en una ley algebraica para tiempos largos.

Las observaciones precedentes pueden formalizarse estudiando el término dominante ( $s \rightarrow 0$ ) de la relación (2.9) y antitransformando Laplace. De esta forma podemos vincular el comportamiento a tiempos grandes de la ley de decaimiento  $N(t)/N_0$  con la distribución  $g(t)dt$ ,

$$N(t) \sim \omega \int_{t'=0}^{t'=t} g(t')dt' . \quad (2.32)$$

La expresión (2.32) resulta consistente entonces con que para un decrecimiento exponencial de  $g(t)$  la ley de decaimiento a tiempos largos manifieste un comportamiento exponencial, mientras que para  $g(t)$  con cola algebraica (del tipo  $1/t^\mu$ ) el decaimiento sea a tiempos largos algebraico con exponente  $\mu + 1$ . La conclusión anterior está íntimamente relacionada con el fenómeno de difusión anómala que tiene lugar en el Gas de Lorentz Periódico cuando el horizonte es infinito y que conduce a una cola algebraica para tiempos largos en la función de autocorrelación de velocidades [18, 19, 20]. Para comprender esta vinculación dedicaremos parte del próximo capítulo a establecer la analogía entre el sistema que nos ocupa y el Gas de Lorentz Periódico.

asintótico de la autocorrelación de velocidades

$$C(t) \equiv \langle (\vec{v}(0) \cdot \vec{v}(t)) \rangle \sim \frac{cte}{t}, \quad (3.1)$$

para una configuración de centros dispersores con horizonte infinito.

El coeficiente de difusión se vincula a la autocorrelación de velocidades a través de la conocida relación de Einstein-Green-Kubo (ver por ejemplo [24])

$$D \equiv \frac{1}{2} \int_0^\infty \langle (\vec{v}(0) \cdot \vec{v}(s)) \rangle ds. \quad (3.2)$$

Considerando el comportamiento asintótico (3.1) para la relación (3.2), vemos que el coeficiente de difusión  $D$  es infinito. La divergencia del coeficiente de difusión caracteriza al fenómeno de difusión anómala que, como se mencionó al finalizar el capítulo 2, ocurre para el Gas de Lorentz periódico cuando el horizonte es infinito [18].

## 3.2 Corredores en el Gas de Lorentz con Horizonte Infinito

En esta sección introduciremos formalmente la definición de corredor para el Gas de Lorentz Periódico bidimensional. Formalmente se dice que una configuración periódica de centros dispersores tiene **horizonte finito** si existe algún  $M > 0$ , tal que cada segmento de longitud  $M$  en el plano intersecta algún dispersor. En caso contrario se dice que la configuración tiene **horizonte infinito**.

Supongamos una configuración de centros dispersores con horizonte infinito y sea  $l$  una línea recta en  $\mathbb{R}^2$  que no intersecta ningún centro dispersor;  $l = \{\alpha_1 t\mathbf{e}_1 + \alpha_2 t\mathbf{e}_2\}$  con  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  y  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  una base de  $\mathbb{R}^2$ . Sea  $L$  el conjunto de tales líneas. En la ref.[25] se introduce la definición de corredor a través de las siguientes proposiciones:

1. El conjunto  $L$  es no vacío.
2. Cualquier  $l \in L$  es racional en el sentido de que  $\alpha_1/\alpha_2$  es racional o infinito.
3. El conjunto  $L$  se descompone en un número finito de clases  $L_{z_1/z_2}$  con el mismo valor de  $\alpha_1/\alpha_2 = z_1/z_2$  con  $z_1, z_2$  racionales.
4.  $L_{z_1/z_2}$  consiste de un conjunto numerable de franjas (**corredores**) tal que cada dominio acotado de  $\mathbb{R}^2$  intersecta solamente a un número finito de dichas franjas.

De lo anterior se desprende que si la trayectoria de una partícula pertenece a un corredor la longitud del camino libre medio será no acotada. Por otra parte, todo camino libre suficientemente grande pertenece casi enteramente a algún corredor. En la definición de  $l$ ,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  pueden interpretarse como las dos componentes de la velocidad  $\vec{v}$  de una partícula cuya trayectoria pertenece a algún corredor.

### 3.3 Relación entre $C(t)$ y $g(t)$

En el capítulo 2 se concluyó que las distribuciones  $g(t)dt$  que decaían al menos exponencialmente daban lugar a leyes de decaimiento tipo exponencial, mientras que  $g(t)dt$  con decaimiento algebraico daban lugar a leyes de decaimiento que resultan exponenciales a tiempos cortos, teniendo una cola algebraica a tiempos largos.

Los resultados numéricos para nuestro sistema manifiestan para valores del radio  $R > R_c$  del centro dispersor la anterior conclusión, con el exponente de la cola algebraica del decaimiento igual a 1.

No debe resultar sorprendente que el comportamiento de la autocorrelación de velocidades  $C(t)$  para el Gas de Lorentz evidencie una transición de exponencial para tiempos cortos a algebraico ( $1/t$ ) para tiempos largos cuando el horizonte es infinito. La relación entre horizonte infinito en el Gas de Lorentz y radio crítico  $R_c$  en el billar

de Sinai quedará completamente establecida en la siguiente sección. Si bien también más adelante estableceremos la forma explícita de la función  $g(t)$ , a continuación demostraremos que existe una expresión general que la vincula con la autocorrelación de velocidades  $C(t)$ . En la ref.[26] se da la expresión general para  $C(t)$  en términos de la distribución de camino libre medio utilizando promedios estadísticos. Aquí adaptaremos ese resultado para el Gas de Lorentz,

$$C(t) = \frac{1}{\langle T \rangle} \int_t^\infty (T - t) f(T) dT \quad (3.3)$$

donde  $f(t)dt$  es la distribución de camino libre medio (introducida en el capítulo 2) y

$$\langle T \rangle = \int_0^\infty t f(t) dt \quad (3.4)$$

el tiempo medio entre colisiones. Transformando Laplace la expresión (3.3) obtenemos

$$\hat{C}(s) = s^{-1} + \langle T \rangle^{-1} s^{-2} (\hat{f}(s) - 1) , \quad (3.5)$$

como en sistemas tipo Gas de Lorentz se verifica (ver Apéndice A)

$$\hat{f}(s) = 1 - s\hat{g}(s)/g(0) , \quad (3.6)$$

finalmente obtenemos

$$\hat{C}(s) = s^{-1} (1 - \hat{g}(s)) . \quad (3.7)$$

Antitransformando Laplace la expresión anterior llegamos a

$$C(t) = 1 - \int_0^t g(t') dt' . \quad (3.8)$$

Dado que  $\int_0^\infty g(t) dt = 1$ , podemos expresar el segundo término de la relación (3.8) como

$$\int_0^t g(t') dt' = 1 - \int_t^\infty g(t') dt' , \quad (3.9)$$

con lo cual

$$C(t) = \int_t^\infty g(t') dt' . \quad (3.10)$$

Con la expresión anterior formalizamos la dependencia existente entre la autocorrelación de velocidades y la función  $g(t)$  para tiempos largos. La relación (2.32) hallada al concluir el capítulo 2 conjuntamente con (3.10), confirman la relevancia que posee la distribución  $g(t)dt$  tanto en el análisis de la ley de decaimiento a tiempos grandes como en el estudio del comportamiento asintótico de la función de correlación de velocidades.

Conocido el comportamiento asintótico para la autocorrelación de velocidades  $C(t)$  en el caso de horizonte infinito, se obtiene a partir de (3.10) el comportamiento asintótico de  $g(t)$ .

Al concluir el presente capítulo desarrollaremos un modelo que permite, a partir del estudio de la sección de Poincarè, calcular analíticamente el comportamiento a tiempos largos de la función  $g(t)$  cuando el conjunto invariante de órbitas periódicas posee un subconjunto parabólico.

### 3.4 Corredores y Órbitas Periódicas Parabólicas

De lo analizado en las dos secciones precedentes se concluye que el fenómeno de difusión anómala (decaimiento  $(1/t)$  para la autocorrelación de velocidades) que tiene lugar en el Gas de Lorentz Periódico con horizonte infinito está íntimamente vinculado con la dinámica asociada a trayectorias que pertenecen a los corredores. Según se concluyó en la sección (3.2) los corredores pueden etiquetarse por los valores  $v_1/v_2 = z_1/z_2$  con  $z_1/z_2$  racional o infinito.

Para el arreglo bidimensional existen al menos dos corredores correspondientes a las direcciones  $x$  y  $y$ . Empleando la notación de la referencia [18], llamaremos a estos corredores  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente. El número de corredores aumenta a medida que el radio  $R$  de los centros dispersores disminuye. Por ejemplo, cuando  $\sqrt{5}/10 < R < \sqrt{2}/4$  aparecen otros corredores ( $\gamma$ ) que corresponden a  $v_y/v_x = \pm 1$ .

Dado que el Gas de Lorentz bidimensional periódico puede considerarse como un modelo del billar de Sinai extendido, es natural que exista una equivalencia entre los mencionados corredores y las órbitas periódicas parabólicas no aisladas del billar (ver Introducción). Los canales  $\alpha$  y  $\beta$  corresponden a partículas que rebotan elásticamente contra dos paredes diametralmente opuestas del billar sin colisionar con el centro dispersor. El canal ( $\gamma$ ) corresponde a partículas cuyas trayectorias son paralelas a las diagonales del cuadrado rebotando secularmente entre caras adyacentes del mismo, y dado que  $R < \sqrt{2}/4$  pueden no colisionar con el dispersor circular. Este análisis puede repetirse para valores de  $R$  menores, encontrando nuevas familias de órbitas periódicas parabólicas.

Una vez enfatizada esta analogía entre corredores en el Gas de Lorentz y órbitas periódicas en el billar de Sinai, pasemos a estudiar qué sucede con el Pozo de Sinai, o sea nuestro billar con agujeros en el espacio de momentos.

### 3.5 La Ley de Decaimiento y las Órbitas Periódicas Parabólicas

En esta sección propondremos la forma explícita para la función  $g(t)$  que da lugar al comportamiento observado para la ley de decaimiento en el Pozo de Sinai.

La condición (1.8) hallada en el capítulo 1 que introduce la separación entre región de billar y región libre, hace que las órbitas periódicas correspondientes a los canales  $\alpha$  y  $\beta$  pertenezcan a la región libre. Por lo tanto para  $R > \sqrt{2}/4$  no existen órbitas periódicas parabólicas atrapadas en la región de billar. Esto tiene una consecuencia directa en la ley de decaimiento, ya que como revelan los estudios numéricos del capítulo 2, para  $R > \sqrt{2}/4$  la ley de decaimiento es exponencial para todo tiempo  $t$ . Para  $R < \sqrt{2}/4$ , las órbitas periódicas parabólicas son atrapadas, evidenciando la

ley de decaimiento una transición de exponencial para tiempos cortos a algebraica para tiempos largos. Este análisis, conjuntamente con los resultados numéricos y el análisis de las distribuciones prueba del capítulo 2 sugieren el siguiente ansatz para  $g(t)$

$$g(t) = C \left( [u(t) - u(t - T_0)] + \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i u[1 - (R/R_{c_i})] D_i[1 - (R/R_{c_i})] \times \sum_{j=2}^{\infty} (1/j)^2 \{u[t - (j-1)T_0] - u(t - jT_0)\} \right), \quad (3.11)$$

siendo  $D_i(x)$  funciones monótonas crecientes de  $x$  entre 0 y 1 con  $D_i(0) = 0$  y  $D_i(1) = 1$ ,  $\alpha_i$  son constantes de peso y  $C$  es la constante de normalización. El primer término de (3.11) es una función escalón, responsable del tramo inicial exponencial en la ley de decaimiento. La segunda contribución, cuando es no nula (ésto es para  $R < \sqrt{2}/4$ ), proviene de condiciones iniciales cuyas posiciones y velocidades son tales que las trayectorias asociadas resulten asintóticas a las órbitas periódicas parabólicas (corredores en el Gas de Lorentz). Los cocientes  $\alpha_i u[1 - (R/R_{c_i})] D_i[1 - (R/R_{c_i})]/C$  pueden interpretarse como la fracción de condiciones iniciales del espacio de fases asintótica a las órbitas periódicas que surgen cuando  $R < R_{c_i}$ .

Como mencionamos, suponemos que la función escalón  $(u(t) - u(t - T_0))$  da lugar al comportamiento inicial exponencial de la ley de decaimiento. Por lo tanto de acuerdo con (2.16) o (2.27),  $T_0$  tiene que estar relacionado con el exponente

$$\lambda = \frac{\ln(1-w)}{T_0}. \quad (3.12)$$

Por otra parte, es conocido el resultado de la teoría ergódica para el tiempo medio entre colisiones con el centro dispersor [27]:

$$\tau = \frac{(1 - \pi R^2)}{2R}. \quad (3.13)$$

Cuando  $R > R_{c_1}$ , se verifica

$$T_0 = \tau \quad (3.14)$$

dado que en ese caso,  $T_0$  es el tiempo medio entre colisiones. La pregunta a formularse es qué sucede cuando  $R < R_{c_1}$  y para contestarla apelaremos a la fig. 5. En ésta se muestra el exponente que resulta del mejor ajuste al tramo exponencial del decaimiento junto con el exponente  $\lambda$  que predice la relación (3.12) como función de  $R$ , asumiendo que  $\tau = T_0$ . La concordancia entre ambas curvas sugiere que se debe verificar

$$T_0 = \frac{(1 - \pi R^2)}{2R}, \quad (3.15)$$

aún cuando  $R < R_{c_1}$ . Dado que  $\tau$  es el tiempo medio entre colisiones únicamente cuando  $R > R_{c_1}$  (ley exponencial de decaimiento), para  $R < R_{c_1}$ ,  $\tau$  resulta ser el tiempo medio entre colisiones para la fracción de partículas que decae exponencialmente. Por lo tanto, el resultado ergódico (3.13) es válido únicamente para la región hiperbólica del espacio de fases.

Uno de los objetivos principales del presente estudio es poder extraer información de la dinámica a partir de la ley de decaimiento observada. En otras palabras obtener, de las cantidades plausibles de ser determinadas por mediciones experimentales, información de la dinámica interna del sistema. En lo que sigue, sin pérdida de generalidad, nos restringiremos en la expresión (3.11) para  $g(t)$  al caso de un único corredor abierto, o sea consideramos órbitas periódicas parabólicas tales que  $v_y/v_x = \pm 1$ . Dado que esto implica un único radio crítico, redefinimos  $R_c = R_{c_1} = \sqrt{2}/4$  y omitimos los subíndices. Denominamos

$$\alpha_1 D_1 [1 - (R/R_c)] = \Delta(R) \quad (3.16)$$

y empleando (2.9) y (3.11) obtenemos

$$\hat{Q}(s) = \frac{w}{T_0 [1 + \Delta(R)(\zeta(2) - 1)] s^2}$$



$$\times \frac{[1 - \exp(-T_0 s)] \exp(T_0 s) [\exp(-T_0 s) + \Delta(R) \Sigma']}{1 + (1 - w) \{ [1 - \exp(-T_0 s)] \exp(T_0 s) [\exp(-T_0 s) + \Delta(R) \Sigma'] - 1 \}} , (3.17)$$

donde  $\Sigma' \equiv \sum_{j=2}^{\infty} \exp(-T_0 s j) / j^2$  y hemos utilizado la expresión para la constante de normalización

$$C = \frac{1}{T_0 [1 + \Delta(R)(\zeta(2) - 1)]} . \quad (3.18)$$

De lo anterior se concluye que  $\Delta$  es el único parámetro libre en la expresión (3.17). Por lo tanto antitransformando numericamente (3.17) y ajustando con la ley de decaimiento obtenida numericamente, obtuvimos  $\Delta(R)$  para varios valores de  $R$ . En la fig. 6 se muestran los resultados obtenidos, donde hemos graficado el  $\ln \Delta$  como función de  $\ln(1 - R/R_c)$ . Por lo tanto podemos asumir para  $\Delta$  la siguiente forma funcional

$$\Delta(R) = \alpha \left( 1 - \frac{R}{\sqrt{2}/4} \right)^{\beta} . \quad (3.19)$$

Tomando el logaritmo en ambos miembros de la expresión anterior

$$\ln \Delta = \beta \ln(1 - R/R_c) + \ln \alpha , \quad (3.20)$$

podemos determinar los parámetros  $\beta$  y  $\alpha$  a través del mejor ajuste lineal.

Hemos obtenido  $\beta = 1.4776$  y  $\alpha = 0.2741$ , graficándose el ajuste en la fig. 6. La fig. 7 muestra la ley de decaimiento obtenida a partir de (3.17) utilizando (3.19) y los valores anteriores de los parámetros, conjuntamente con la ley de decaimiento calculada numéricamente en el capítulo 2 para cuatro valores de  $R$  que corresponden todos ellos a al sistema con un único corredor (o sea una única familia de órbitas periódicas parabólicas). Conocidos  $\alpha$  y  $\beta$  es posible obtener información de la fracción de condiciones iniciales asintótica a esta familia de órbitas periódicas parabólicas.

### 3.6 Estudio Analítico del Comportamiento a Tiempos Largos de $g(t)$ .

Esta sección estará dedicada al estudio de la distribución  $g(t)$  para tiempos largos. Consideraremos la situación en la cual el conjunto invariante de órbitas periódicas no es completamente hiperbólico. Nos restringiremos al caso de un único corredor abierto en el Gas de Lorentz, lo que equivale a considerar una única familia de órbitas periódicas parabólicas atrapadas. De forma de comparar los resultados que aquí se deriven con los obtenidos en las secciones anteriores, supondremos que  $\sqrt{5}/10 < R < \sqrt{2}/4$  por lo tanto las órbitas parabólicas son las correspondientes a  $v_y/v_x = \pm 1$ .

Consideraremos la dinámica en la superficie de Poincarè sobre el contorno del billar (ver capítulo 1). Por lo tanto, estudiaremos el mapa  $(l, v_t) \rightarrow (l', v'_t)$  que es generado por la dinámica sobre la superficie de Poincarè.

La simetrías del problema (correspondientes al grupo  $C_{4v}$ ) permiten restringir el mapa sobre todo el contorno del cuadrado a una única cara arbitrariamente elegida. Introducimos las variables reducidas

$$\begin{aligned} x &= (l + 1 - k) , \\ v &= v_t , \end{aligned} \tag{3.21}$$

donde  $k = 1, 2, 3, 4$  numera las caras del cuadrado en sentido antihorario.

La figura 8 muestra varias curvas que dividen la superficie de Poincarè en regiones que están caracterizadas no sólo por el lado sobre el cual cada punto es iterado bajo la acción del mapa, sino también por la existencia (o no) de una colisión con el centro dispersor antes de arribar a dicho lado. A modo de ejemplo, los  $(x, v) \in I_2$  son condiciones que se mapean a la cara 2 sin colisionar con el centro dispersor, mientras que los  $(x, v) \in I'_2$  corresponden a partículas que arriban a la cara 2 colisionando

previamente con el dispersor.

La figura 9 es similar a la fig. 8, pero en este caso nos interesan las preimágenes de los puntos  $(x, v)$ . Por lo tanto los  $(x, v) \in A_2$  corresponden a partículas que provienen de la cara 2 sin haber sufrido ninguna colisión con el centro dispersor y los  $(x, v) \in A'_2$  están relacionados con condiciones que provienen de la cara 2 habiendo chocado con el dispersor. Las curvas de la figura 9 pueden ser obtenidas de las de la fig. 8 a través de la operación de simetría  $(x, v) \rightarrow (x, -v)$  que corresponde a la inversión temporal. Dado que también está presente la simetría  $C_{4v}$  la curva límite que divide las regiones  $I_2$  e  $I'_2$  puede ser obtenida de la curva límite que separa las regiones  $I_4$  e  $I'_4$  a través de la transformación  $(x, v) \rightarrow (1-x, -v)$ . Esta transformación es una reflexión con respecto al plano perpendicular que contiene el centro del dispersor circular y el punto medio del lado  $(x = 1/2)$ . Dado que el sentido de las órbitas parabólicas para una dada familia puede ser horario o antihorario, sin pérdida de generalidad consideraremos únicamente el primer subconjunto.

Nuestro interés está concentrado en estudiar como decrece con el tiempo el área inicialmente definida por

$$A_4 \cap I_2. \quad (3.22)$$

Esto es, de que forma el número de puntos que arriba a la cara 1 desde la 4 y luego se mapea en la cara 2 sin sufrir ninguna colisión con el centro dispersor decrece con el número de iteraciones del mapa o lo que es equivalente, con el número de rebotes contra las caras del cuadrado  $n$ . Queda claro que el área final correspondiente a  $n \rightarrow \infty$  será cero salvo para el conjunto atrapado (de medida nula) correspondiente a las órbitas periódicas parabólicas de la familia considerada.

La fig. 10 muestra el área inicial. Las curvas  $AB$  y  $BC$  están definidas por

$$v = \frac{(1/2 - x)\sqrt{(1/2 - x)^2 + (1/2)^2 - R^2} + R/2}{(1/2 - x)^2 + (1/2)^2}, \quad (3.23)$$

$$v = \frac{(x - 1/2)\sqrt{(1/2 - x)^2 + (1/2)^2 - R^2} + R/2}{(1/2 - x)^2 + (1/2)^2}. \quad (3.24)$$

Estas curvas están determinadas por las rectas tangentes al dispersor circular que partiendo del punto  $x$  van respectivamente a la cara 2 y a la cara 4. La intersección del conjunto invariante parabólico y la superficie de Poincarè es el segmento  $\overline{II'}$  donde  $I = (x = R/2R_c, v = \sqrt{2}/2)$  e  $I' = (x = (1 - R/2R_c), v = \sqrt{2}/2)$ . Aquí,  $R_c = \sqrt{2}/4$ . Por lo tanto la longitud del segmento invariante es

$$L = (1 - R/R_c). \quad (3.25)$$

El mapa para los puntos que van a la cara 2 sin colisionar con el centro dispersor es

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\sqrt{1 - v^2}}{v}(1 - x), \\ v' &= \sqrt{1 - v^2}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Este mapa transforma puntos que pertenecen a la curva  $AB$  en puntos pertenecientes a la curva  $BC$  y transforma  $BC$  en la curva  $DE$  de la fig. 10. En particular podemos verificar que el segmento  $\overline{II'}$  permanece invariante (o sea se transforma sobre sí mismo).

Después de sucesivas iteraciones el área remanente se reduce al cuadrilátero mostrado en la parte derecha de la fig. 11. Las condiciones iniciales en el área de interés son las que aún no han colisionado con el centro dispersor. El cuadrilátero es transformado en el paralelogramo aproximado de igual área mostrado en la parte izquierda de la figura (no olvidar que el área remanente es muy pequeña). El sector triangular que cae fuera de la región de interés, corresponderá a las partículas que colisionarán por primera vez con el dispersor circular. Por inspección de la fig. 11 resulta que

$$\begin{aligned} l'_2 &= \frac{(l_1 + l_2)}{2}, \\ l_1 &= \frac{Ll_2}{(2l_2 \cos \alpha + L)}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{(l_2' - l_2)}{l_2} &\approx \frac{\tau_0}{l_2} \frac{dl_2}{dt}, \\ &= -\frac{l_2 \cos \alpha}{(2l_2 \cos \alpha + L)}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

donde hemos introducido el tiempo como  $t = \tau_0 n$ , siendo  $\tau_0 = \sqrt{2}/2$  un tiempo característico entre dos colisiones sucesivas sobre las caras del cuadrado.

Integrando (3.28) obtenemos

$$\frac{(t - t_0)}{\tau_0} = \frac{L}{\cos \alpha} \left( \frac{1}{l_2(t)} - \frac{1}{l_2(0)} \right) - 2 \ln \frac{l_2(t)}{l_2(0)}. \quad (3.29)$$

Como estamos interesados en tiempos  $t$  largos, entonces podemos aproximar la expresión anterior de forma de obtener

$$l_2 \approx \frac{L\tau_0}{\cos \alpha} \times \frac{1}{t}. \quad (3.30)$$

Por lo tanto el área del paralelogramo resulta,

$$\begin{aligned} A(t) &= 2l_2(t)L \sin \alpha, \\ &\approx 2\tau_0 L^2 \tan \alpha \times \frac{1}{t}, \\ &\approx \sqrt{2} \tan \alpha \left(1 - \frac{R}{R_c}\right)^2 \times \frac{1}{t}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

donde hemos empleado la igualdad (3.25). De forma de poder evaluar  $\tan \alpha$ , calculamos la primera derivada de (3.24) en  $I'$

$$\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}(1 - R/2R_c)}. \quad (3.32)$$

Por lo tanto finalmente obtenemos,

$$A(t) = \frac{(1 - R/R_c)^2}{(1 - R/2R_c)} \times \frac{1}{t}, \quad (3.33)$$

Por los argumentos precedentes, el comportamiento a tiempos largos de la distribución  $g(t)$  será

$$\begin{aligned} g(t) &\sim -\frac{dA}{dt} \\ t &\rightarrow \infty \end{aligned} \quad (3.34)$$

con lo cual

$$\begin{aligned} g(t) &\sim \frac{(1 - R/R_c)^2}{(1 - R/2R_c)} \times \frac{1}{t^2}, \\ &\sim (1 - R/R_c)^{3/2} \times \frac{1}{t^2}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

En la última relación, el exponente  $3/2$  resulta consistente con el valor del parámetro  $\beta = 1.4776$  obtenido en la sección anterior a partir del análisis de la ley de decaimiento observada.

El resultado aquí hallado mediante el estudio de la sección de Poincarè, concuerda con el encontrado en la sección (3.3) a partir del estudio alternativo de la vinculación existente entre  $g(t)$  y la autocorrelación de velocidades  $C(t)$  para horizonte infinito.

## Capítulo 4

# El Decaimiento en $D$ Dimensiones

Este capítulo está dedicado al estudio de la ley de decaimiento en  $D$  dimensiones para el Pozo de Sinai.

La extensión a dimensiones mayores que dos, hace más interesante a nuestro sistema como modelo de núcleo compuesto, ya que en este caso las dimensiones adicionales pueden interpretarse como grados internos de libertad. Por lo tanto el proceso de redistribución de la energía entre los grados internos de libertad resulta en una dinámica cuya complejidad crece con el número de variables internas involucradas. Además de la complejidad en la dinámica que surge al considerar varios grados de libertad la pregunta natural que uno se formula es cómo depende la ley de decaimiento con las dimensiones y en que medida la complejidad de la dinámica interna se evidencia en el decaimiento. A lo largo de este capítulo trataremos de responder a estas cuestiones.

### 4.1 El Pozo de Sinai en $D$ dimensiones

En el capítulo 1 se realizó una descripción detallada del Pozo de Sinai en  $D = 2$  dimensiones. Este es el sistema que elegimos como modelo para estudiar la ley de

decaimiento en el caso de un problema con 2 grados de libertad. La extensión a más dimensiones es bastante directa pero existen algunas características nuevas que resultan convenientes de detallar. Por lo tanto nos abocaremos en esta sección a la descripción del Pozo de Sinai en  $D$  dimensiones.

Consideremos nuevamente una partícula puntual de masa unidad pero ahora en un pozo cuadrado  $D$  dimensional (hipercubo) de profundidad  $-V_0$ , ( $V_0 > 0$ ) y lado  $a$ , que colisiona elásticamente con un dispersor ubicado en el centro geométrico del pozo. El dispersor es una esfera  $D$  dimensional de radio unidad y como es usual tomamos el módulo de la velocidad de la partícula igual a uno. Análogamente al estudio del problema en dos dimensiones consideramos la energía total de la partícula  $E = p^2/2 - V_0$  ( $0 \leq E \leq V_0$ ).

En  $D$  dimensiones el movimiento ligado está caracterizado por la condición

$$\sqrt{1 - \left( \frac{\vec{p} \cdot \hat{n}_i}{|\vec{p}|} \right)^2} > \sin \Psi_{lim} , \quad (4.1)$$

donde  $\hat{n}_i$ ,  $i = 1, \dots, D$ , es la dirección de la normal interna correspondiente a la cara  $i$  del hipercubo sobre la cual la partícula rebota elásticamente y

$$\Psi_{lim} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + V_0/E}} , \quad (4.2)$$

es el ángulo límite en  $D$  dimensiones. La desigualdad (4.1) es la condición que se debe satisfacer para que exista reflexión interna cuando la partícula alcanza algún contorno del hipercubo.

En el capítulo 1 fue hallada la relación (1.8) que es la condición de movimiento ligado para  $D = 2$ . Comparando (1.8) y (4.1) se ve que esta última es la generalización directa a más dimensiones de la condición (1.8).

Como se mencionó oportunamente, la colisión con el centro dispersor cambia el valor de las componentes del momento de la partícula y esto puede generar la transición de la región de billar o ligada a la región libre. En otras palabras puede producirse



el decaimiento.

En el sistema  $D$  dimensional el ángulo límite  $\Psi_{lim}$  puede relacionarse con la probabilidad  $\omega_D < 1$  de que la partícula transite de la región ligada a la libre después de una colisión con el centro dispersor. En este caso el espacio de momentos es una hipersfera de radio unidad (recordar que el módulo de  $\vec{p} = 1$ ) en la cual

$$\omega_D = \frac{d\Psi_{lim}(D)}{\Omega(D)}, \quad (4.3)$$

donde  $d\Psi_{lim}(D)$  y  $\Omega(D)$  son respectivamente el ángulo sólido subtendido por  $\Psi_{lim}$  y el ángulo sólido total en  $D$  dimensiones. En el Apéndice B se demuestra explícitamente la relación (4.3) en función de  $\Psi_{lim}$ . Aquí damos el resultado general

$$\omega_D \sim \Psi_{lim}^{D-1}, \quad (4.4)$$

que muestra que para una energía  $E$  fija, la probabilidad de transición decrece con la dimensión  $D$  cuando  $\Psi_{lim} \ll 1$ .

## 4.2 Estudio Numérico del Decaimiento en $D$ Dimensiones

En esta sección mostramos los resultados del estudio numérico del decaimiento. Es un hecho conocido que para tiempos cortos el comportamiento de la ley de decaimiento en  $D$  dimensiones es exponencial. Bouchaud y Le Doussal [19] estudiaron numéricamente la dinámica de una partícula puntual en un arreglo  $D$  dimensional de centros dispersores (Billar de Sinai sin horizonte) encontrando un decaimiento exponencial en la autocorrelación de velocidades para tiempos cortos.

Nuestro objetivo principal es entender el comportamiento de la ley de decaimiento

para tiempos largos. Como veremos en la siguiente sección, de forma de extraer información acerca del comportamiento a tiempos largos, alcanza con conocer la distribución  $g_D(t)dt$  (análoga a la definida en el capítulo 2) para el caso multidimensional. Para el análisis numérico estudiaremos la función  $G = \int_{t'=0}^{t'=t} g_D(t') dt'$  como función de  $t$  en vez de  $N(t)/N_0$  (para determinar  $G$  solamente hay que computar para cada condición inicial el tiempo transcurrido hasta el primer choque con el centro dispersor, ésto es una gran ventaja para el cálculo computacional ya que requiere menos tiempo de CPU y permite mejorar la estadística pudiendo considerar mayor cantidad de condiciones iniciales).

Comenzamos con  $N_0 = 10^7$  partículas distribuidas al azar en el espacio de fases accesible y consideramos como en el caso bidimensional el cociente  $V_0/E = 20$ .

La Fig. 12(a) muestra el resultado del estudio numérico de  $G$  para  $D = 2, 3, 4$  y radio del centro dispersor  $D$  dimensional  $R = 0.23$ . Se evidencia que el comportamiento es exponencial para tiempos cortos y se transforma en algebraico ( $1/t^\delta$ ) para tiempos largos. La Fig. 12(b) muestra las colas algebraicas de  $G$  para  $D = 2, 3, 4$  junto con el mejor ajuste que predice para todas las curvas un valor del exponente  $\delta = 1$ .

La Fig. 13(a) es similar a la Fig. 12(a) pero para  $R = 0.4$ . Para  $D = 2$  la función  $G$  es una exponencial para todo tiempo. Este resultado concuerda con lo obtenido en el capítulo 2 y en la referencia [28] en el sentido de que para el sistema bidimensional  $R > R_{c1} = \sqrt{2}/4$  es compatible con una distribución  $g_D(t)$  de horizonte finito, resultando la ley de decaimiento exponencial para todo tiempo. Para  $D = 3, 4$  nuevamente el mejor ajuste predice un exponente  $\delta = 1$  para la cola algebraica.

La Fig. 13(b) muestra dicho ajuste junto con los resultados numéricos a tiempos largos para  $D = 3, 4$ .

De lo anterior resulta que contrariamente a lo que sucede para el sistema bidimensional, para  $D > 2$  no existe un radio crítico del centro dispersor a partir del cual el comportamiento de la ley de decaimiento cambia para tiempos grandes. En términos

del conjunto invariante atrapado la observación precedente es equivalente a afirmar que para el sistema multidimensional existen siempre órbitas periódicas del tipo parabólico, siendo las condiciones iniciales asintóticas a estas órbitas aquellas que contribuyen a la cola algebraica ( $1/t$ ) de la ley de decaimiento.

### 4.3 Estudio Teórico

Del estudio numérico de la sección anterior puede concluirse que para el Pozo de Sinai la ley de decaimiento a tiempos largos resulta independiente de la dimensión  $D$ .

Dentro del marco teórico, todos los trabajos hasta ahora desarrollados estudian modelos análogos únicamente en dos dimensiones [29], [30]. Para más dimensiones en la ref.[19] se formula una conjetura que estima un comportamiento exponencial para la ley de decaimiento aún a tiempos largos. Como veremos a lo largo de esta sección esta conjetura no es cierta.

Para comenzar con el análisis teórico extenderemos a  $D$  dimensiones algunos resultados obtenidos en el capítulo 2 que vinculan la ley de decaimiento con la dinámica interna. La generalización a  $D$  dimensiones de (2.6) es

$$\hat{Q}(s) = \frac{\omega_D \hat{g}_D(s)/s}{1 - (1 - \omega_D)\hat{f}_D(s)} , \quad (4.5)$$

donde nuevamente  $\hat{Q}(s) = L[Q(t)]$  es la Transformada de Laplace de  $Q(t)$  y

$$Q(t) = 1 - \frac{N(t)}{N_0} . \quad (4.6)$$

Teniendo en cuenta que en  $D$  dimensiones se sigue verificando la igualdad,

$$dg_D/dt = -g_D(0)f_D(t) , \quad (4.7)$$

de tal forma que

$$\hat{f}_D(s) = 1 - s\hat{g}_D(s)/g_D(0) , \quad (4.8)$$

obtenemos

$$\hat{Q}(s) = \frac{\omega_D \hat{g}_D(s)/s}{1 + (1 - \omega_D)[\hat{g}_D(s)s/g_D(0) - 1]} . \quad (4.9)$$

La ecuación precedente es la generalización de la (2.9) que se obtuvo en el capítulo 2 para el problema bidimensional siendo en aquel caso  $\omega_{D=2} = w$ . Antitransformando Laplace (4.9) se determina  $Q(t)$ .

De forma de establecer el comportamiento a tiempos largos de la ley de decaimiento calculamos el término dominante de (4.9) y empleando la relación (4.6) obtenemos

$$N(t) \sim \omega_D \int_{t'=0}^{t'=t} g_D(t') dt' . \quad (4.10)$$

Por lo tanto como se anticipó en la sección anterior basta conocer la distribución  $g_D(t)dt$  para analizar el comportamiento a tiempos largos de la ley de decaimiento. Por otra parte resulta conveniente generalizar a  $D$  dimensiones la definición de corredores del capítulo 3 para lo cual emplearemos el modelo de Gas de Lorentz periódico  $D$  dimensional. Recientemente Chernov [31] estudió la estadística asociada a este sistema en el dominio hiperbólico (horizonte finito) y un análisis numérico de algunas propiedades universales fue desarrollado en el trabajo de Bouchaud y Le Doussal [19]. La definición de horizonte infinito es análoga a la del caso bidimensional (ver capítulo 3). La primera extensión trivial a  $D$  dimensiones de los corredores es definirlos por las direcciones de la velocidad  $\vec{v}$  que satisfacen  $v_i/v_j = z_1/z_2 \forall (i, j)$ , siendo  $z_1$  y  $z_2$  enteros coprimos. Como es de preveer estas no son las únicas direcciones que conducen en  $D$  dimensiones a un movimiento libre no acotado. Por ejemplo para  $D = 3$  la dirección definida por  $v_1 = 0$ ,  $v_2$  y  $v_3$  arbitrarias (compatibles con la condición de que el módulo de la velocidad,  $|\vec{v}| = 1$ ) define un corredor en cuanto a movimiento no acotado se refiere.

La principal característica para remarcar es que a medida que la dimensión  $D$  aumenta es posible encontrar cada vez más direcciones que definan movimiento no acotado para cualquier valor del radio  $R$  del centro dispersor que satisfaga  $R \leq 0.5$ . Por lo tanto

en  $D > 2$  dimensiones no existe radio crítico  $R_c$  como sucede para  $D = 2$ . Conviene aclarar, por razones que quedarán justificadas más adelante, que  $R_c$  influencia el número de corredores, ya que existen ciertos corredores que desaparecen cuando  $R > R_c$ .

Todas las trayectorias que contribuyen al comportamiento para tiempos largos del decaimiento permanecen casi enteramente en algún corredor. En términos del Pozo de Sinai podemos decir que estas trayectorias corresponden a condiciones iniciales asintóticas a las órbitas periódicas parabólicas que se generan en  $D$  dimensiones abandonando la región ligada con probabilidad  $\omega_D$  después de colisionar con el centro dispersor.

Además de los corredores que se pueblan con condiciones iniciales que contribuyen al decaimiento algebraico a tiempos largos con un exponente  $\delta = 1$  (los denominamos **corredores principales**), existen otros corredores que se pueblan con condiciones iniciales que generan un comportamiento de la ley de decaimiento del tipo  $(1/t^\mu)$  con el exponente  $\mu > 1$ . Una manifestación de estos corredores puede observarse en la Fig. 14. Esta muestra para  $D = 4$  y  $R = 0.4$  dos curvas  $G$  como función del tiempo  $t$ . En una (línea punteada) todos los corredores han sido poblados y el exponente de la cola algebraica es  $\delta = 1$ ; en la otra curva representada por la línea sólida no se han considerado explícitamente condiciones iniciales asintóticas a los corredores principales resultando un exponente diferente de 1 para la cola algebraica.

Los corredores poblados con estas condiciones iniciales los llamaremos **corredores escondidos** ya que no existe evidencia de los mismos en el comportamiento global de la ley de decaimiento para tiempos largos. Los resultados numéricos de la sección precedente confirman que a tiempos largos la ley de decaimiento es  $(1/t)$  independientemente de la dimensión  $D$ .

Por otra parte el comportamiento a tiempos intermedios de la ley de decaimiento, vinculado con las condiciones iniciales asintóticas a los corredores escondidos, resulta

ser una superposición de decaimientos del tipo algebraicos con exponentes mayores que uno. Este comportamiento es cada vez más complejo a medida que crece la dimensión  $D$ .

Por lo tanto de forma de entender el comportamiento a tiempos largos de la ley de decaimiento alcanza con analizar la dinámica dentro de los corredores.

Comenzaremos obteniendo la dependencia explícita con  $t$  de la distribución  $g_D(t)dt$  para aquellas condiciones iniciales asintóticas a los corredores principales, empleando el Gas de Lorentz Periódico  $D$  dimensional. Sin pérdida de generalidad calcularemos  $g_D(t)dt$  para aquellas condiciones iniciales que pueblan en  $D = 3$  dimensiones el corredor principal definido por las direcciones de la velocidad  $v_1/v_2 = \pm 1$  y  $v_3$  arbitraria que satisfaga  $|\vec{v}| = 1$ , para  $R < R_c = \sqrt{2}/4$ .

En la fig. 15 se representa el mencionado corredor de ancho  $l$  en la cual hemos cortado con el plano  $z = \text{const.}$  los dispersores esféricos por su centro geométrico de forma de simplificar la figura.

Recordamos que como el  $|\vec{v}| = 1$  las distribuciones en tiempos resultan equivalentes a distribuciones en longitudes.

Sea  $n(t^*)$  la fracción de condiciones iniciales para las cuales la primera colisión con un determinado dispersor ocurre para tiempos  $t > t^*$ . Dado que estamos interesados en el comportamiento a tiempos largos, el ángulo  $\alpha$  (ver fig. 15) es proporcional a  $n(t^*)$ ,

$$n(t^*) \sim \alpha \sim \frac{l}{t^*} \quad (4.11)$$

y

$$-dn/dt^* \sim \frac{l}{t^{*2}} \sim g_D(t^*) \quad (4.12)$$

donde  $g_D(t^*)dt^*$  representa la fracción de condiciones iniciales para las cuales la primera colisión con el centro dispersor sucede entre  $t^*$  y  $t^* + dt^*$ . Deberíamos agregar en la última expresión el resultado de la integración sobre el ángulo sólido total, pero

como es una constante no modifica la dependencia temporal. Por lo tanto,

$$g_D(t) \sim \frac{cte}{t^2}. \quad (4.13)$$

Empleando la expresión precedente en (4.10) obtenemos el comportamiento a tiempos largos para la ley de decaimiento,

$$N(t) \sim \frac{\omega_D}{t}. \quad (4.14)$$

que corrobora los resultados previamente obtenidos. Los cálculos precedentes pueden repetirse para otros corredores principales, obteniéndose la misma dependencia temporal para la ley de decaimiento.

Para los corredores escondidos, vestigios de algún corredor principal que desaparece cuando  $R > R_c$ , la integración sobre el ángulo sólido da lugar a una dependencia adicional en  $1/t$ . Por lo tanto para los corredores escondidos en  $D = 3$  dimensiones obtenemos

$$g_D(t) \sim \frac{cte'}{t^3}. \quad (4.15)$$

Los cálculos precedentes pueden rehacerse para mayores dimensiones. Para los corredores principales la dependencia temporal queda inalterada, dependiendo la constante que resulta de integrar el ángulo sólido de la dimensión considerada.

Para los corredores escondidos, a medida que la dimensión  $D$  aumenta la integración sobre el ángulo sólido da lugar a contribuciones en  $g_D(t)$  del tipo  $1/t^\mu$  con  $3 \leq \mu \leq D$  que al decaer más rápidamente que  $(1/t^2)$  no se observan en el comportamiento a tiempos largos de la ley de decaimiento.

## 5.1 Preliminares

En términos generales el fenómeno de dispersión puede definirse como el problema de obtener la vinculación entre las variables de “entrada” que caracterizan cierto estado de un sistema dinámico y las variables de “salida” que caracterizan una dada situación final. Para sistemas Hamiltonianos de dos grados de libertad, a una dada energía, la variable de salida es en general el ángulo de dispersión  $\Theta$  (mide la desviación de la trayectoria en la región asintóticamente libre con respecto a la dirección de incidencia), y la variable de entrada suele ser el parámetro de impacto  $b$  (definido como la distancia al origen de la trayectoria incidente).

El objetivo en el estudio del problema de dispersión es el de establecer la vinculación funcional entre ambas variables. Esto es, obtener la relación funcional entre  $\Theta$  y  $b$  para una dada energía. La función que describe esta dependencia se conoce en la literatura con el nombre de **función reacción o de dispersión** [5]. Uno de los aspectos fundamentales a resaltar es que la función reacción evidencia características cualitativamente diferentes dependiendo si la dinámica en la región de interacción es regular o caótica. En los sistemas integrables, el ángulo de deflexión es una función monótona del parámetro de impacto (en general decreciente), y el análisis de los procesos de dispersión en estos sistemas podría decirse que es un problema cerrado.

El primer indicio que manifiesta una diferencia sustancial entre los sistemas regulares y los caóticos es que en estos últimos la función reacción experimenta grandes fluctuaciones que ocurren a todas las escalas del parámetro de impacto  $b$ .

A modo de ejemplo, de la ref.[33] se ha extraído la fig. 16 que muestra la relación entre  $\Theta$  y  $b$  obtenida numéricamente para el potencial  $V(x, y) = x^2 y^2 \exp [-(x^2 + y^2)]$ . Este potencial consiste de cuatro barreras cuyos picos están localizados en  $(x, y) = (\pm 1, \pm 1)$ . La dinámica puede ser regular o caótica dependiendo de la energía de la partícula incidente. No analizaremos aquí el origen de este comportamiento, sim-



plemente estudiaremos ciertos aspectos fenomenológicos. Cuando la energía  $E$  de la partícula es mayor que el máximo de energía potencial  $E_m$  la dispersión es regular, evidenciando la fig. 16(a) el comportamiento suave de  $\Theta$  como función de  $b$ . Cuando  $E < E_m$  la dinámica es caótica, mostrando la función de reacción regiones aparentemente singulares, en las que la variable de salida  $\Theta$  varía tan rápida y abruptamente con  $b$  que se necesitaría de una precisión infinita como para resolverlas (ver fig. 16(b)). Si amplificamos esas regiones en la escala horizontal como para mejorar la resolución, vemos en la fig. 16(c) que las regiones singulares persisten. Este comportamiento se manifiesta a todo nivel de resolución, por más arbitrariamente pequeña que sea la escala de valores de  $b$ .

El tipo de comportamiento descrito para la función de dispersión implica que una pequeña indeterminación en  $b$  puede hacer imposible la determinación de  $\Theta$ , o sea existe sensibilidad a las condiciones iniciales.

Formalmente se demuestra que el conjunto de valores de  $b$  para los cuales  $\Theta$  es singular es un conjunto de Cantor, o sea tiene estructura fractal y medida de Lebesgue cero. Este conjunto corresponde a determinadas condiciones iniciales que dan lugar a órbitas que entran en la región de interacción y permanecen allí por siempre, o sea son órbitas atrapadas. Si bien estas órbitas no son accesibles en ninguna situación realista dado que tienen medida cero, una condición inicial que resulte asintótica a una de estas órbitas, permanecerá más tiempo en la región de interacción cuanto más cercana sea a la órbita atrapada.

Por lo tanto, otra alternativa a estudiar en los procesos de dispersión caótica es la **función de tiempos de retardo** que brinda información acerca de cómo depende de  $b$  el tiempo de permanencia de una dada órbita en la región de interacción. Nuevamente esta función toma valores infinitos siempre que haya una singularidad en la función de dispersión.

Desde otro enfoque uno podría definir a las órbitas atrapadas como aquel conjunto

del espacio de fases del cual todas las trayectorias dispersadas son finalmente expulsadas, y dado que la dinámica asociada es caótica muchas veces en la literatura se lo denomina **repelot caótico**.

Una medición cuantitativa que caracteriza la magnitud de los efectos descritos es la dimensión del conjunto fractal de singularidades, existiendo numerosos trabajos en los cuales se la calcula, entre otros las ref. [8, 33, 34]. Las características del conjunto fractal así como su dimensión dependen fuertemente de la estructura del espacio de fases y de las órbitas atrapadas. Por lo tanto, es necesario el estudio detallado del conjunto invariante atrapado de forma de comprender los diferentes mecanismos que dan lugar al comportamiento descrito.

Tanto la función de dispersión como la función de tiempos de retardo presentan características marcadamente diferentes dependiendo si la dinámica en espacio de fases es completamente hiperbólica, presenta regiones con islas de estabilidad (toros KAM), o no presenta islas de estabilidad pero a la vez no es completamente hiperbólica. El análisis de los dos primeros casos está actualmente bastante bien desarrollado, entendiéndose bastante rigurosamente los mecanismos que ocurren en el espacio de fases y que dan lugar a los diferentes comportamientos observados.

Es uno de los principales objetivos del presente trabajo el estudio de los procesos de dispersión para el caso en que la dinámica en espacio de fases no posee islas de estabilidad pero además no es completamente hiperbólica, o sea presenta un subconjunto de órbitas atrapadas parabólicas. Desarrollaremos este tema en el próximo capítulo. En él analizaremos a los procesos de dispersión entendiéndolos como procesos de decaimiento en los cuales la población inicial no obedece a una distribución inicial microcanónica sino que la forma de poblar depende de las características del haz incidente. A partir de este enfoque obtendremos, como ocurrió para los procesos de decaimiento estudiados en los capítulos precedentes, información de la dinámica interna.

A continuación efectuaremos una descripción, a través del análisis de la dinámica en espacio de fases, de la dispersión caótica para el caso hiperbólico y de dinámica mixta, estableciendo las principales diferencias entre ambos casos.

En términos generales puede decirse que la dinámica en espacio de fases es hiperbólica si todas las trayectorias periódicas son inestables y aisladas, no existiendo islas de estabilidad.

En ese caso, el conjunto invariante atrapado que provendrá de las intersecciones homoclínicas y heteroclínicas de las órbitas periódicas inestables, consistirá de un número infinito de órbitas inestables periódicas y no periódicas (para mayores detalles ver por ejemplo ref. [1]). Una condición inicial que comience en la variedad estable de una órbita del conjunto atrapado, tardará un tiempo infinito en abandonar esa región del espacio de fases o sea será capturada por siempre. Por lo tanto la función de dispersión poseerá una singularidad para esa condición inicial. El conjunto fractal de valores de  $b$  que hacen singular a la función de dispersión corresponde a todas las condiciones iniciales que pertenecen a la variedad estable. La dimensión fractal es en general menor que 1 y mayor que 0 [33, 34].

Otro aspecto interesante de estudiar es la estadística de tiempos de retardo  $P(T)$ . Dado un conjunto de condiciones iniciales que definen ciertos valores de  $b$ , se computa el tiempo de permanencia de cada condición inicial en la región de interacción. La fracción de condiciones iniciales con tiempos de retardo entre  $T$  y  $T + dT$  es  $P(T)dT$ .

Para la dispersión hiperbólica la estadística de tiempos de retardo obedece una ley de decaimiento exponencial

$$P(T) \sim \exp(-T/\tau), \quad (5.1)$$

donde  $\tau$  es un tiempo característico del sistema.

Para resumir, la dispersión caótica hiperbólica está caracterizada por:

1. Dimensión fractal  $D$  del conjunto de singularidades es en general  $0 < D < 1$ .
2. Decaimiento exponencial de la distribución de tiempos de retardo.

Cuando la dinámica en espacio de fases es mixta, coexisten regiones regulares de islas de estabilidad rodeadas por superficies KAM inmersas en un mar de movimiento caótico [2]. Si bien la naturaleza del fenómeno de dispersión en este caso no está tan entendida como en el caso hiperbólico, la existencia de toros KAM hace que las condiciones iniciales no puedan acceder a regiones del espacio de fases delimitadas por las islas de estabilidad. Por otro lado puede llegar a generarse un mecanismo de difusión lenta en espacio de fases en caso de que existan Cantoros [35]. En la literatura se dice que los toros KAM son “pegajosos” ya que las condiciones iniciales cercanas a ellos permanecen más tiempo en la región de interacción. Esto hace que la distribución de tiempos de retardo  $P(T)$  sea cualitativamente diferente al caso hiperbólico, decayendo algebraicamente [36]

$$P(T) \sim T^{-\alpha} . \quad (5.2)$$

Hemos hecho especial énfasis en distinguir la dinámica mixta de la no hiperbólica. Como se discutió en la introducción, la dinámica no hiperbólica no necesariamente implica la existencia de islas de estabilidad.

En el campo de la dispersión caótica, hasta la fecha conocemos un solo trabajo que explica un decaimiento algebraico de la distribución de tiempos de retardo en un sistema donde la ausencia de estructuras estables es probada analíticamente. Heillermeier *et al.* [9] investigaron el proceso de ionización en el átomo de hidrógeno mediante un modelo resoluble de difusión, prediciendo el coeficiente de decaimiento  $\alpha$  con un error relativo del 10%.

En el Pozo de Sinai la dinámica en espacio de fases, para ciertos valores del radio del centro dispersor  $R$ , no es completamente hiperbólica y no presenta regiones regulares (ver capítulos precedentes). Por lo tanto, el estudio del problema de dispersión en nuestro sistema [37] constituye una contribución muy valiosa para la comprensión del fenómeno de dispersión caótica en sistemas no hiperbólicos. En el próximo capítulo desarrollaremos este estudio.

Para concluir daremos algunos ejemplos físicos que muestran la amplia gama de procesos que conducen a la dispersión caótica.

## 5.2 Ejemplos Físicos

- **Mecánica Celeste.** Existen numerosos problemas de mecánica celeste en los cuales la dinámica es caótica. De hecho el Caos puede decirse que nace a partir de los estudios de Poincaré de la interacción gravitatoria entre tres cuerpos. Un ejemplo más reciente es el trabajo de Petit y Hénon [38] en el que se estudia el movimiento en el plano de dos cuerpos masivos pequeños alrededor de una masa muy pesada. Inicialmente ambos cuerpos se mueven en círculos concéntricos de distinto radio alrededor de la masa central. En caso de encuentros cercanos entre ambas partículas se desarrolla una dinámica muy complicada con la consecuencia que, salvo para un conjunto de medida nula de condiciones iniciales, las pequeñas partículas se separan nuevamente. Este fenómeno puede resultar relevante para el movimiento de las lunas de ciertos planetas o para partículas en anillos planetarios.
- **Procesos Hidrodinámicos.** Es un hecho conocido que la dinámica de vórtices ideales es caótica si el número de vórtices es mayor que tres (para más detalles ver por ejemplo la ref.[39]). Cuando los vórtices están separados unos

de otros pueden llegar a acercarse debido a la interacción entre ellos. Para el caso de un fluido infinito, no existe configuración estable en la que todos los vórtices permanezcan agrupados; la distancia entre algunos de ellos puede crecer indefinidamente. Tal proceso puede interpretarse como un fenómeno de dispersión y en el caso de que el número de vórtices sea mayor o igual a cuatro es de dispersión caótica.

También es conocido que el movimiento de una partícula trazadora pasiva en un fluido viscoso puede ser caótico. En caso de que el fluido incompresible sea abierto puede ocurrir la dispersión de la partícula. La contribución de Jung *et al.* en la ref. [32] es una investigación cuantitativa de este problema.

- Modelos de Reacciones Químicas. En muchas reacciones químicas el número de moléculas iniciales y finales es el mismo, o sea no se crean complejos. Igualmente existen (con vidas medias muy cortas) complejos intermedios y la dinámica inherente puede ser lo suficientemente complicada como para que imperceptibles cambios en las condiciones iniciales lleven a estados finales marcadamente distintos. O sea una trayectoria no reactiva puede existir en la vecindad de una reactiva o viceversa. La importancia de las trayectorias inestables dentro de la región de dinámica caótica ha sido estudiada por Pechukas *et al* [40]. Actualmente se sabe que existe un conjunto infinito de trayectorias periódicas inestables presentes que pueden interpretarse como el conjunto invariante atrapado (repelente caótico). El tiempo de vida media promedio de las trayectorias en la región caótica puede interpretarse en el marco del estudio clásico de las reacciones químicas como el tiempo de vida media del complejo intermedio.

Este ha sido un brevísimo pantallazo sobre algunos temas en los cuales la dispersión caótica es ampliamente aplicable. Para una revisión más exhaustiva se recomienda la ref.[32] y las referencias allí citadas.

## Capítulo 6

# La Dispersión Caótica no Hiperbólica

El fenómeno de dispersión caótica cuando la dinámica no es completamente hiperbólica era hasta hace muy poco un problema abierto. El trabajo de Hillermeier [9] del año 1992 es el primero en el que se demuestra un decaimiento algebraico de la distribución de tiempos de retardo en un sistema donde se prueba analíticamente la no existencia de islas de estabilidad en el espacio de fases. Como se mencionó varias veces, el objetivo fundamental en el presente trabajo es el de obtener información de la dinámica interna de un sistema a través del estudio de las leyes temporales de decaimiento. Los capítulos precedentes se han dedicado al problema del decaimiento a partir de una distribución microcanónica en el espacio de fases. El presente capítulo estará dedicado al estudio del proceso de dispersión caótica para el Pozo de Sinai y mediante ese estudio poder obtener información de la dinámica interna de los sistemas no hiperbólicos. Más allá de las argumentaciones que hacen de nuestro sistema el paradigma de los sistemas no hiperbólicos que no poseen dinámica mixta, quizá lo

más importante a recalcar es que la forma en que abordaremos el problema de dispersión pone en evidencia cuan interrelacionados están los procesos de decaimiento (estudiados en los capítulos 2 y 3) con los de dispersión. Veremos que la única diferencia entre ambos fenómenos está en la distribución de condiciones iniciales en el espacio de fases. Esta conexión se evidencia ya en el trabajo de Pikosky [11], en el cual encuentra, por medio de un modelo difusivo, una relación entre el exponente de la ley de decaimiento y el de la distribución de tiempos de retardo para un sistema hamiltoniano con dinámica mixta. También presenta resultados numéricos de la relación mencionada entre los exponentes en un sistema no hiperbólico. Estudia ambos procesos en el billar de Bunimovich al cual se le efectúa un agujero que permite el escape (y la entrada) de partículas. Este billar posee una familia de órbitas marginalmente estables (parabólicas) responsable del decaimiento algebraico de las correlaciones [23]. En este ejemplo, si consideramos las partículas incidiendo a través del agujero y abandonando el billar después de un número de rebotes contra las paredes del mismo, estaremos en presencia de un problema de dispersión. El problema de decaimiento sería considerar las partículas inicialmente ligadas dentro del billar y en un dado instante abrir el agujero permitiendo el escape de las mismas.

## 6.1 La Dispersión Caótica en el Pozo de Sinai.

En el capítulo 2 hemos estudiado el decaimiento para el Pozo de Sinai cuando éste es poblado de acuerdo a una distribución microcanónica en el espacio de fases y expresamos la ley de decaimiento en término de distribuciones internas que caracterizaban la dinámica.

Como previamente mencionamos el conjunto invariante del presente sistema puede ser completamente hiperbólico o tener un subconjunto de órbitas parabólicas dependiendo del valor del radio  $R$  del centro dispersor circular. En caso de que el conjunto



invariante sea completamente hiperbólico la ley de decaimiento es exponencial para todo tiempo, mientras que la existencia del subconjunto parabólico se evidencia en una la ley de decaimiento algebraica para tiempos largos. Aquí nos interesaremos en las consecuencias globales sobre la leyes temporales en los experimentos de dispersión para el caso en que el subconjunto parabólico está presente.

El proceso de dispersión en el Pozo de Sinai puede entenderse de la siguiente manera (ver Capítulo 1 para una descripción minuciosa del sistema, aquí conservamos las mismas unidades de longitud y de tiempo, y nuevamente el módulo de la velocidad de la partícula dentro del pozo es 1). Cuando el proyectil incidente colisiona con el centro dispersor (primer choque), su velocidad  $\vec{v}$  puede ser reorientada de tal forma que la condición de movimiento ligado

$$\frac{|v_i|}{v} \geq \frac{1}{\sqrt{1 + V_0/E}} = \sin \psi_{lim} , \quad (6.1)$$

se satisfaga. En tales casos la partícula permanecerá en el pozo rebotando elásticamente contra las paredes del cuadrado y el centro dispersor hasta que una colisión con este último reoriente la velocidad como para que la condición (6.1) deje de satisfacerse y la partícula abandone el pozo. Entre la primera colisión y la última la dinámica es cuasiligada (ver Introducción). Distinguiremos dos casos: El primero corresponde a  $R > R_c = \sqrt{2}/4$ , en el cual todas las órbitas atrapadas son hiperbólicas, o sea involucran como mínimo una colisión adicional con el centro dispersor. Por lo tanto este caso corresponde a un proceso de dispersión caótica hiperbólica, donde la dinámica interna está dominada por colisiones con el centro dispersor. El número de reflexiones internas contra las paredes del cuadrado entre dos choques con el círculo no puede ser mayor que tres, con lo cual el tiempo de retardo (tiempo de permanencia en la región de interacción) crece con el número de colisiones  $n$  con el centro dispersor. La Figura 17(a) muestra una órbita representativa. Para este caso la función de tiempo de retardo tiene el comportamiento autosimilar característico de los procesos hiperbólicos.

Como se mencionó en el capítulo anterior este comportamiento está relacionado con la dimensión fractal no entera del conjunto invariante atrapado.

La fig. 18 (a) muestra la correspondiente función de tiempo de retardo para  $R = 0.38$ . Podemos identificar la misma estructura para cada nivel de resolución, siendo el valor de la ordenada proporcional al número  $n$ .

El segundo caso corresponde a  $R < R_c$ , para el cual el conjunto atrapado posee órbitas parabólicas que no colisionan con el dispersor circular, por lo tanto involucran únicamente reflexiones contra las paredes del cuadrado. Como consecuencia, para algunos valores del parámetro de impacto, entre dos colisiones con el centro dispersor, la dinámica está dominada por reflexiones sobre las caras del cuadrado. La Figura 17(b) muestra una órbita representativa. Para esta situación, el tiempo de permanencia en la región de interacción crece entre dos colisiones con el centro dispersor, de acuerdo con el número de reflexiones internas contra las paredes del cuadrado. Este hecho origina en la función de tiempos de retardo un fondo regular sobre el cual se monta la estructura característica de las regiones hiperbólicas. La fig. 18 (b) corresponde a la situación descrita. El fondo regular puede ser analíticamente determinado y su origen resulta más claro si se usa como modelo la versión extendida del sistema (Gas de Lorentz periódico) en el cual, como vimos en el capítulo 3, las órbitas periódicas parabólicas corresponden a los corredores. Dedicaremos el resto de esta sección a la explicación y determinación del fondo regular en la función de tiempos de retardo.

Para nuestro análisis consideremos que el proyectil tiene un parámetro de impacto  $\rho$  tal que entre la primera colisión con el centro dispersor y la última, su dinámica es no hiperbólica (involucra únicamente reflexiones contra las paredes del cuadrado). La fig. 17 (a) muestra una órbita representativa de esta situación. Dado que la velocidad interna es constante (y su módulo es igual a 1), el tiempo de permanencia en la región de interacción será directamente la longitud  $L$  de la trayectoria interna. Para evaluarla usaremos el modelo del Gas de Lorentz periódico en el cual la longitud  $L$  se

determina a partir del cociente entre el ancho del corredor  $\delta$  y el ángulo de desviación de la velocidad con respecto a la dirección del corredor después de la primera colisión con el dispersor. Aquí calcularemos  $L$  para el corredor definido por  $v_y/v_x = \pm 1$  y  $\delta = (\sqrt{2}/2 - 2R)$ . Como primer paso determinaremos el punto  $(x_0, y_0)$  donde el proyectil impacta el centro dispersor, como función del parámetro de impacto  $\rho$  y el ángulo de incidencia  $\gamma_i$  (ver Fig. 21).

$$x_0 = \frac{\sqrt{(m^2 + 1)R^2 - b^2} - mb}{1 + m^2}, y_0 = mx_0 - b, \quad (6.2)$$

donde

$$m = \frac{v_y}{v_x} = \cot \gamma_r = \frac{\sqrt{(V_0/E) + \cos^2 \gamma_i}}{\sin \gamma_i}, \quad (6.3)$$

$$b = \frac{1}{2} - m \left( \frac{1}{2} - \frac{\rho - 1/2(\cos \gamma_i - \sin \gamma_i)}{\sin \gamma_i} \right). \quad (6.4)$$

Como segundo paso evaluamos el ángulo  $\alpha_s$ , que corresponde a la dirección de la velocidad después del choque,

$$\tan \alpha_s = \frac{|-2x_0y_0 - (y_0^2 - x_0^2)m|}{|(y_0^2 - x_0^2) - 2x_0y_0m|}. \quad (6.5)$$

Para finalizar, evaluamos la desviación de  $\alpha_s$  con respecto a la dirección del canal. En este caso es  $(\pi/4 - \alpha_s)$ . Para proyectiles dentro de los corredores, este ángulo es en general mucho menor que uno, por lo tanto

$$(\pi/4 - \alpha_s) \approx \tan(\pi/4 - \alpha_s) = \frac{1 - \tan \alpha_s}{1 + \tan \alpha_s}, \quad (6.6)$$

con lo cual

$$L(\rho) = \frac{(\sqrt{2}/2 - 2R)(1 + \tan \alpha_s(\rho))}{1 - \tan \alpha_s(\rho)}. \quad (6.7)$$

La figura 19 (a) muestra una parte de la función de tiempos de retardo (obtenida de las simulaciones numéricas) correspondiente a parámetros de impacto que conducen a una dinámica interna dominada por el subconjunto atrapado de órbitas parabólicas

definidas por  $v_y/v_x = 1$ . La fig. 19 (b) muestra el fondo regular obtenido en (6.7), evidenciándose la concordancia entre ambos resultados. Los valores de los parámetros considerados fueron  $R = 0.05$ ,  $\gamma_i = \pi/4$  y  $V_0/E = 20$ .

## 6.2 La Dispersión Caótica como un Proceso de Decaimiento.

En el comienzo del presente capítulo se hizo referencia al trabajo de Pikosky ([11]), en el cual se menciona que los procesos de decaimiento y dispersión difieren únicamente en el tipo de condiciones iniciales con que se puebla el espacio de fases. En el problema de decaimiento se asume que inicialmente el sistema es completamente ligado y el decaimiento se produce a partir de una distribución estadísticamente estacionaria (que nosotros llamaremos distribución de equilibrio) cuando se proporciona algún mecanismo que permite el escape de partículas.

En los procesos de dispersión, la población inicial depende exclusivamente de las características del haz incidente. En todos los casos, el poseer un haz de partículas con una dada energía hace que la distribución inicial esté localizada en una región del espacio de fases, generalmente en un subconjunto cuya dimensión es menor que la dimensión de la superficie de energía constante.

De lo expuesto, se concluye que el formalismo empleado en el capítulo 2 para establecer la ley de decaimiento a partir del equilibrio, puede adaptarse convenientemente de forma de obtener la ley de decaimiento para los procesos de dispersión.

Comenzaremos resumiendo los resultados obtenidos en el cap. 2, que permiten relacionar la ley de decaimiento con distribuciones características de la dinámica interna:

$$\hat{Q}(s) = \frac{w\hat{g}_e(s)/s}{1 - (1 - w)\hat{f}_e(s)} , \quad (6.8)$$

donde  $\hat{Q}(s) = \mathcal{L}[Q(t)]$  es la Transformada de Laplace y

$$Q(t) = 1 - N(t)/N_0 . \quad (6.9)$$

$N(t)/N_0$  es la fracción de partículas presente en el pozo a tiempo  $t$  (o sea la ley de decaimiento) y

$$w = \frac{1}{\pi} \times 4 \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + V_0/E}} . \quad (6.10)$$

la probabilidad de que una partícula abandone la región de interacción después de una colisión con el dispersor circular.

Las distribuciones  $g_e(t)dt$  y  $f_e(t)dt$  son las definidas en el capítulo 2, correspondientes a una distribución inicial de equilibrio y como ya vimos están relacionadas por la condición (6.11) que aquí reiteramos

$$\frac{dg_e}{dt} = -g_e(0)f_e(t) . \quad (6.11)$$

También se concluyó oportunamente, que para distribuciones  $g_e(t)$  con decrecimiento exponencial la ley de decaimiento es exponencial para todo tiempo. En caso de que  $g_e(t)$  decrezca algebraicamente, la ley de decaimiento cambia de exponencial para tiempos cortos a algebraica para tiempos largos.

Como ya mencionamos, para el estudio del problema de dispersión la función  $g(t)$  es arbitraria, dependiendo del tipo de haz incidente. Para distinguirla de la del problema de decaimiento a partir del equilibrio, la llamaremos  $g_p(t)$  y consecuentemente la relación (6.11) no se satisface más.

Para nuestro análisis consideraremos un haz incidente uniforme, constituido por partículas puntuales con energía  $E$  y cuyas velocidades subtienden un ángulo  $\gamma_i$  con la dirección normal a la cara del cuadrado sobre la que inciden (ver para más detalle fig. 20). Consideraremos dentro del haz únicamente aquellas partículas que colisionan con el centro dispersor, ya que en caso contrario una dada condición inicial que penetra en el pozo, lo abandona por la cara opuesta (lámina de caras paralelas). En tales

condiciones el haz corresponde a una población uniforme de partículas sobre un segmento de longitud  $2R/\cos \gamma_r$  en la cara correspondiente del cuadrado, subtendiendo la dirección de la velocidad un ángulo

$$\gamma_r = \arcsin \frac{\sin \gamma_i}{\sqrt{1 + V_0/E}} . \quad (6.12)$$

La distribución resultante  $g_p(t)$  es un pulso centrado en  $\tau_0 = (1/(2 \cos \gamma_r) - \pi R/4)$  y de ancho  $R(1 + \tan \gamma_r)$ .

Por simplicidad, en lo que sigue ignoraremos los detalles de  $g_p(t)$ , manteniendo sus características relevantes (horizonte finito y localización temporal). En los resultados finales podremos inspeccionar la relevancia de esta aproximación. Entonces consideramos,

$$g_p(t) = \delta(t - \tau_0) . \quad (6.13)$$

Por otro lado, como las colisiones con el centro dispersor son el mecanismo para alcanzar el equilibrio, asumimos crudamente que después de cada colisión la función de autocorrelación de velocidades se hace cero, esto es hay pérdida estadística de memoria sobre la población inicial. Por lo tanto, la distribución  $f(t)$  es la correspondiente al equilibrio  $f_e(t)$ . Las hipótesis anteriores implican que la versión modificada de (6.8) sea

$$\hat{Q}_p(s) = \frac{w \hat{g}_p(s)/s}{1 - (1 - w) \hat{f}_e(s)} . \quad (6.14)$$

En lo que sigue calcularemos  $N(t)/N_0$  a partir de (6.14) para el problema de dispersión en caso de que el conjunto atrapado contenga una única familia de órbitas periódicas parabólicas caracterizadas por  $|v_x| / |v_y| = 1$ . Esto corresponde a valores del radio  $R$  del dispersor tales que  $\sqrt{5}/10 < R < \sqrt{2}/4$ . En este caso sabemos que (ver [28] ó capítulo 3),

$$f_e(t) = C \left( [\delta(t) - \delta(t - T_0)] + \Delta(R) \right)$$

$$\times \sum_{j=2}^{\infty} (1/j)^2 \{ \delta[t - (j-1)T_0] - \delta(t - jT_0) \} \Bigg) , \quad (6.15)$$

donde

$$\Delta(R) \equiv \alpha \left( 1 - \frac{R}{\sqrt{2}/4} \right)^{\beta} , \quad (6.16)$$

con  $\beta = 1.4776$  y  $\alpha = 0.2741$ ,

$$(T_0)^{-1} = \frac{2R}{(1 - \pi R^2)} . \quad (6.17)$$

y

$$C = \frac{1}{T_0[1 + \Delta(R)(\zeta(2) - 1)]} , \quad (6.18)$$

siendo  $\zeta(2) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ .

La  $\hat{Q}_p(s)$  resultante es

$$\hat{Q}_p(s) = \frac{w}{s} \times \frac{\exp(-\tau_0 s)}{w - (1-w)[1 - \exp(sT_0)][\exp(-sT_0) + \Delta(R) \sum_{n=2}^{\infty} \exp(-nsT_0)/n^2]} \quad (6.19)$$

que depende de  $R$  (a través de  $\tau_0$ ,  $T_0$  y  $\Delta(R)$ ),  $E$  (a través de  $w$ ) y  $\gamma_i$  (a través de  $\tau_0$ ). Esta última dependencia aparece como una traslación temporal que resulta irrelevante para  $t \gg \tau_0$ .

Enfatizamos que la expresión (6.19) queda unívocamente determinada en cuanto a que no posee parámetros libres, debido a que hemos usado aquellos que obtuvimos en el capítulo 3 para el decaimiento a partir del equilibrio.

Hemos calculado  $N(t)/N_0$  para  $R = 0.23$ , energía  $E = V_0/20$  y  $\gamma_i = \pi/4$  mediante simulaciones numéricas y efectuando la Transformada Inversa de Laplace en (6.19). Para las simulaciones numéricas consideramos inicialmente  $10^7$  partículas uniformemente distribuidas en el segmento de longitud  $2R/\cos \gamma_r$  sobre la cara del cuadrado (ver fig. 20) y cuyas velocidades (de módulo uno) subtienden un ángulo  $\gamma_r$  con la dirección normal a la cara dado por la expresión (6.12). La fig. 22 muestra los resultados, pudiéndose observar el ajuste satisfactorio entre ambos cálculos. Para tiempos cortos el decaimiento es exponencial, estando este comportamiento relacionado

con las condiciones iniciales que resultan asintóticas al conjunto atrapado de órbitas periódicas hiperbólicas. El decaimiento algebraico a tiempos largos proviene de aquellas condiciones iniciales que resultaron asintóticas a las órbitas periódicas parabólicas. Los resultados numéricos predicen que el comportamiento de la cola algebraica del decaimiento para el problema de dispersión sea  $\sim 1/t^{\alpha_s}$  con el exponente  $\alpha_s = 2$ . Teniendo en cuenta que la cola algebraica del decaimiento a partir de la población de equilibrio es  $\sim 1/t^{\alpha_e}$  con  $\alpha_e = 1$  (ver capítulo 3), concluimos

$$\alpha_s - \alpha_e = 1 . \quad (6.20)$$

La relación anterior es idéntica a la hallada en la Ref.[11].

Para formalizar los resultados anteriores apelaremos a los cálculos teóricos efectuados en el capítulo 2 a partir de los cuales se obtuvo el comportamiento a tiempos largos de la ley de decaimiento a partir de la población de equilibrio,

$$N(t) \sim \omega \int_{t'=0}^{t'=t} g_e(t') dt' \sim \frac{1}{t} . \quad (6.21)$$

Para obtener el comportamiento a tiempos largos de la ley de decaimiento en los procesos de dispersión, debemos considerar el término dominante en la expresión (6.14) utilizando (6.13). Por lo tanto, antitransformando y usando la relación (6.9) obtenemos

$$N_p(t) \sim w(1-w) \int_{t'=\tau_0}^{t'=t} f_e(t' - \tau_0) dt' . \quad (6.22)$$

Si en esta última relación empleamos la igualdad (6.11), finalmente obtenemos

$$N_p(t) \sim \frac{1}{t^2} \quad (6.23)$$

verificándose la relación (6.20).

La diferencia entre los exponentes fue también observada y explicada en la Ref.[41] para un sistema cuya dinámica interna es completamente regular.



# Conclusiones

En el presente trabajo hemos estudiado las leyes temporales de decaimiento en un sistema transitoriamente ligado que no posee islas regulares de estabilidad en el espacio de fases.

La primera parte del trabajo se dedicó al estudio del proceso de decaimiento a partir de una población de equilibrio, en  $D = 2$  dimensiones.

Demostramos la existencia de dos comportamientos bien de definidos y diferenciados en la ley de decaimiento dependiendo de los valores del parámetro de control  $R$ . Ambos comportamientos están separados por un valor crítico  $R = R_c$ . En un caso obtenemos una ley de decaimiento puramente exponencial y esto ocurre para  $R > R_c$ , mientras que  $R < R_c$  el decaimiento exhibe una transición de exponencial a tiempos cortos a algebraico ( $\sim 1/t$ ) para tiempos largos.

Hemos relacionado la ley de decaimiento observada con propiedades de la dinámica interna utilizando la hipótesis ergódica de que las velocidades de las partículas que colisionan con el centro dispersor entre  $t$  y  $t + dt$  están uniformemente orientadas antes de cada colisión. Bajo esta hipótesis hemos demostrado que distribuciones  $g(t)$  cuyo decrecimiento es al menos exponencial (horizonte finito), lo cual implica que todas las partículas dentro del pozo colisionan con el centro dispersor en un tiempo finito, conducen a una ley de decaimiento puramente exponencial.

Por otra parte, cuando  $g(t)$  posee una cola algebraica para tiempos largos ( $1/t^\gamma$ ), la

ley de decaimiento muestra inicialmente un decaimiento exponencial que se transforma en algebraico para tiempos largos.

En nuestro sistema, horizonte finito implica que únicamente están permitidas en la región de movimiento ligado órbitas periódicas que involucren al menos una colisión con el centro dispersor. Estas órbitas son hiperbólicas, debido a las propiedades divergentes del obstáculo circular. Por lo tanto, una ley de decaimiento puramente exponencial corresponde a una región de dinámica de billar completamente hiperbólica, estando conformado el conjunto invariante atrapado por las órbitas periódicas hiperbólicas. Este conjunto invariante tiene medida de Lebesgue cero y dimensión fractal, siendo esta última fácil de calcular proyectando el conjunto invariante en el espacio de momentos y utilizando el formalismo encontrado en la referencia [5] y la Eq.(2.16) aplicada a la circunferencia de radio unidad.

Por otro lado,  $g(t)$  con horizonte infinito es compatible con la existencia de órbitas periódicas que no colisionan con el centro dispersor. Estas coinciden con las órbitas periódicas del problema integrable (en este caso el billar cuadrado) y resultan ser parabólicas, es decir levemente inestables pero no aisladas. Por lo tanto cuando estas órbitas están presentes, la región de dinámica de billar no es completamente hiperbólica y el conjunto invariante atrapado posee un subconjunto parabólico además del hiperbólico.

A partir del estudio precedente concluimos que la distribución  $g(t)$  para el Pozo Sinai cuyo centro dispersor tiene radio  $R$ , posee dos contribuciones. La primera corresponde a aquellas partículas cuyas condiciones iniciales resultan asintóticas a la zona hiperbólica de la región de billar. Modelamos esta contribución con una función escalón decreciente cuyo ancho  $T_0(R)$  está dado por la teoría ergódica.

La segunda contribución corresponde a partículas cuyas condiciones iniciales son asintóticas a las órbitas periódicas parabólicas. Esta contribución debe ser nula para  $R > R_c$ , y su influencia en la distribución total  $g(t)$  crece a medida que el radio  $R$

decrece, comenzando por  $R = R_{c_1}$ . Estos valores especiales de  $R$  corresponden al máximo radio para el cual la órbita parabólica  $i$  puede existir. Como consecuencia, modelamos esta contribución con una función algebraica decreciente la cual es multiplicada por una función de peso que tiene en cuenta las consideraciones anteriores. De forma de verificar nuestro ansatz, hemos considerado nuestro sistema para el caso en que está presente una única familia de órbitas parabólicas, ésto es  $R_{c_2} < R < R_{c_1}$ . El ajuste entre la ley de decaimiento real y la que se obtiene a partir del estudio analítico propuesto resulta inmejorable.

Como forma de verificar que nuestro análisis nos permite extraer de la ley de decaimiento observada información de la dinámica interna, hemos obtenido, a partir del ajuste, resultados consistentes con los que hallamos a partir del estudio de las características de la dinámica interna del problema completamente ligado, o sea del billar de Sinai.

Otra parte fundamental del trabajo consistió en el estudio de los procesos de decaimiento a partir del equilibrio para dimensiones mayores que dos [42].

La diferencia fundamental entre el sistema  $D > 2$ -dimensional y el análogo en dos dimensiones, es que más allá de ser ambos completamente caóticos, el primero posee un subconjunto invariante de órbitas periódicas parabólicas para todo valor del radio  $R$  del dispersor.

Lo anterior, conjuntamente con lo discutido hasta ahora, implica que para el sistema en  $D > 2$ , la ley de decaimiento resulta ser siempre algebraica para tiempos largos, contribuyendo a esta cola algebraica las condiciones iniciales asintóticas a las órbitas periódicas parabólicas que existen en  $D$  dimensiones.

El hecho de que el conjunto invariante posea órbitas parabólicas para todo valor del radio del centro dispersor es corroborado mediante el estudio de los correspondientes corredores en el Gas de Lorentz Periódico multidimensional.

A partir de relacionar la ley de decaimiento con propiedades de la dinámica interna

hemos obtenido que el exponente de la cola algebraica ( $\sim 1/t^\delta$ ) es  $\delta = 1$ . Este valor resulta ser independiente del número de dimensiones.

El comportamiento de la ley de decaimiento para tiempos intermedios está relacionado con las condiciones iniciales asintóticas a los denominados corredores escondidos. Dichas condiciones iniciales contribuyen a la ley de decaimiento con una dependencia temporal del tipo  $(1/t^\mu)$ , con  $2 \leq \mu \leq D$ .

La independencia con la dimensión  $D$  del comportamiento global para tiempos largos de la ley de decaimiento concuerda con el resultado encontrado en la ref. [6]. En ese trabajo los autores investigan numéricamente el decaimiento en un billar cuadrado multidimensional, permitiendo el escape de partículas a través de una pequeña ventana en una de las paredes de la caja. Las simulaciones son efectuadas para distintas dimensiones  $D$ , obteniendo una ley de decaimiento algebraica ( $\sim 1/t$ ) para todas las dimensiones investigadas. Este resultado queda ahora justificado en virtud de que el conjunto invariante atrapado del sistema regular coincide con las órbitas periódicas parabólicas de nuestro sistema.

Otro fenómeno que provee información acerca de la dinámica interna a través del estudio del movimiento asintótico libre es el problema de dispersión.


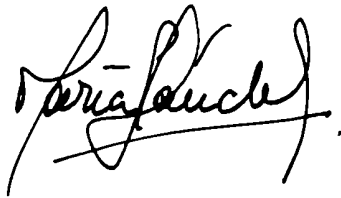
En el presente trabajo hemos demostrado cómo la existencia de un subconjunto atrapado de órbitas parabólicas modifica a la función de tiempos de retardo en los procesos de dispersión caótica. El mencionado subconjunto da lugar, en la función de tiempos de retardo, a un fondo regular sobre el cual se monta la estructura patrón característica de los procesos hiperbólicos.

Mediante un enfoque novedoso que permite estudiar a los procesos de dispersión como procesos de decaimiento en los cuales se puebla una región particular del espacio de fases, hemos obtenido la ley de decaimiento para el problema de dispersión en dos dimensiones. Para tal fin, fue necesario cambiar la distribución  $g(t)$ , correspondiente a una población de equilibrio, por una apropiada para describir los procesos de dis-

persión.

Hemos mostrado que la existencia del subconjunto parabólico conduce, en el problema de dispersión, a una ley algebraica de decaimiento para tiempos largos ( $\sim 1/t^2$ ). El exponente característico difiere en uno del correspondiente al decaimiento a partir de una población de equilibrio.

Este hecho fue fundamentado estudiando el comportamiento a tiempos largos del decaimiento a partir del equilibrio y del decaimiento a partir de una población inicial proveniente del experimento de dispersión (ver final del Capítulo 6). Mientras el primero está dominado por la pérdida de autocorrelación en las velocidades de la distribución inicial, el segundo está dominado por la tasa de variación de dicha pérdida. Para concluir es interesante resaltar que de acuerdo a lo estudiado en el Capítulo 2, las distribuciones de equilibrio  $g_e(t)$  con horizonte finito, ésto es decrecimiento al menos exponencial, conducen a partir de la relación (6.11) a distribuciones  $f_e(t)$  también con horizonte finito. Por lo tanto a partir de (6.14) se demuestra que la ley de decaimiento en el problema de dispersión será también exponencial cuando  $R > \sqrt{2}/4$ .

  
A. J. FENDRIK

# Apéndice A

## Relación entre $g(t)$ y $f(t)$ .

Este apéndice está dedicado a obtener la relación que se verifica entre las distribuciones  $g(t)$  y  $f(t)$  en sistemas como el Gas de Lorentz y el Billar de Sinai.

Comenzaremos estudiando la distribución  $g(t)dt$  para el caso de un único dispersor circular inmerso en una distribución bidimensional de partículas libres, todas ellas con velocidades unitarias  $v$  uniformemente orientadas. La fracción de partículas que colisiona con el dispersor entre  $t$  y  $t+dt$  cuyas velocidades subtienden un ángulo  $\alpha$  con la dirección radial (esto es, la línea recta que pasa a través del centro del dispersor y la partícula considerada) es proporcional al área  $I(\alpha, t)$  de la corona circular de radio

$$l(\alpha, t) = vt \cos \alpha + (R^2 - v^2 t^2 \sin^2 \alpha)^{1/2} . \quad (\text{A.1})$$

Por lo tanto,

$$I(\alpha, t)dt = 2\pi l(\alpha, t)\delta l(\alpha, t) , \quad (\text{A.2})$$

donde

$$\begin{aligned} \delta l(\alpha, t) &= \frac{dl}{dt} dt \\ &= \left[ v \cos \alpha - \frac{(v^2 \sin^2 \alpha)t}{(R^2 - v^2 t^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}} \right] dt . \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Para obtener  $g(t)$  debemos integrar (A.1) sobre todos los valores posibles de  $\alpha$  para los cuales pueda tener lugar la colisión.

$$g(t)dt \propto \left[ \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} I(\alpha, t) d\alpha \right] dt, \quad (\text{A.4})$$

En la expresión precedente,  $\alpha_1 = \arcsin \left[ R / \sqrt{R^2 + (vt)^2} \right]$ . Luego de cálculos un poco largos pero directos obtenemos

$$g(t)dt \propto 4\pi v R dt. \quad (\text{A.5})$$

Por lo tanto, la fracción de partículas que colisiona con el dispersor circular entre  $t$  y  $t + dt$  resulta ser independiente de  $t$ . Podemos interpretar esta propiedad a través de un mapa que preserva el número de partículas que colisiona: por cada partícula que choca al tiempo  $t$ , extendiendo la dirección de su trayectoria hacia atrás un tiempo arbitrario  $\delta t$ , encontramos otra partícula que colisionará en  $t + \delta t$ .

Ahora pasemos a considerar un sistema tipo Gas de Lorentz, esto es un sistema de partículas puntuales igual que en el ejemplo anterior pero en este caso existen varios centros dispersores fijos en el plano. Para nuestro análisis, elegimos arbitrariamente un centro dispersor (lo llamaremos dispersor prueba) y nos preguntamos acerca de la distribución  $f(t)dt$ , o sea sobre la fracción de partículas que colisionará con este dispersor entre  $t$  y  $t + dt$ , habiendo colisionado previamente con cualquiera de los otros centros. Como veremos esta distribución estará muy relacionada con  $g(t)$ . Si queremos repetir el análisis anterior, veremos que la  $g(t)$  en este sistema se verá modificada por la presencia de los otros centros dispersores (ya no resultará independiente de  $t$ ).

Consideremos las partículas que colisionan con el dispersor de prueba en un tiempo  $t$ , la fracción correspondiente al total de partículas será  $g(t)$ . Si extendemos sus trayectorias hacia atrás un tiempo  $dt$  vemos que existen dos posibilidades:

- La trayectoria prolongada cae en el mar de partículas y por lo tanto encontramos una que colisionará con el dispersor marcado en  $t + dt$  contribuyendo a  $g(t + dt)$ .
- La trayectoria prolongada penetra en un centro dispersor y por lo tanto no corresponde a una partícula que colisione en  $t + dt$ . En este caso esta trayectoria no contribuye a  $g(t + dt)$ .

De las anteriores consideraciones podemos concluir que  $-(g(t + dt) - g(t))$  resulta ser proporcional al número de partículas que colisionan con el dispersor prueba a tiempo  $t$  habiendo sufrido una colisión previa con algún otro dispersor. Formalizando,

$$f(t) = -\eta \frac{dg}{dt} dt . \quad (\text{A.6})$$

La constante  $\eta = 1/g(0)$  se determina mediante la condición de normalización

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^\infty f(t) dt , \\ &= -\eta \int_0^\infty \frac{dg}{dt} dt , \\ &= \eta g(0) . \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

debido a que  $g(\infty) = 0$ .

Consecuentemente, el tiempo medio entre colisiones  $\tau$  resulta

$$\begin{aligned} \tau &= \int_0^\infty t f(t) dt , \\ &= -\frac{1}{g(0)} \int_0^\infty t \frac{dg}{dt} dt , \\ &= \frac{1}{g(0)} . \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$



## Apéndice B

### Obtención de $\omega_D$ .

Este apéndice está dedicado a la obtención de la expresión explícita para la probabilidad de transición en el espacio de momentos  $\omega_D$  empleada en el capítulo 4. Esta puede ser evaluada usando la teoría ergódica como el cociente entre todas las orientaciones del momento que pertenecen a la región libre y todas las posibles orientaciones del momento.

El espacio de momentos es una  $D$  esfera de radio unidad ya que  $|\vec{p}|$  es uno. Definamos  $d\Psi_{lim}(D)$  como el ángulo sólido subtendido por  $\Psi_{lim}$ , donde  $\Psi_{lim}$  está dado por la expresión (4.2) hallada en el capítulo 4 y  $\Omega(D)$  como el ángulo sólido total en  $D$  dimensiones. Como se estableció en (4.3)

$$\omega_D = \frac{d\Psi_{lim}(D)}{\Omega(D)}, \quad (\text{B.1})$$

por lo cual para calcular  $\omega_D$  debemos conocer la expresión explícita para  $\Omega(D)$  y  $d\Psi_{lim}(D)$ .

Introduciendo las coordenadas para  $D$  dimensiones ( $D \geq 3$ )

$$(r, \phi, \theta_1, \dots, \theta_{D-2}), \quad (\text{B.2})$$

con  $r = 1$ ,  $0 < \phi < 2\pi$  y  $0 < \theta_i < \pi$ ,  $i = 1, \dots, D-2$  podemos obtener la siguiente expresión

$$\Omega(D) = 2\pi \prod_{i=1}^{D-2} \int_0^\pi \sin^i \theta_i d\theta_i . \quad (\text{B.3})$$

Empleando la igualdad conocida [17]

$$\int_0^\pi \sin^i \theta_i d\theta_i = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(i + 1/2)}{\Gamma(i + 2/2)} \quad (\text{B.4})$$

y reemplazándola en la expresión (B.3), obtenemos

$$\Omega(D) = \frac{\pi^{D-2}}{\Gamma(D/2)} . \quad (\text{B.5})$$

De forma de obtener  $d\Psi_{lim}(D)$  debemos integrar en las variables  $\theta_i$  con  $i = 1, \dots, D-3$ , entre  $0 < \theta_i < \pi$  y  $0 < \theta_{D-2} < \Psi_{lim}$

$$d\Psi_{lim}(D) = 2\pi \prod_{i=1}^{D-3} \int_0^\pi \sin^i \theta_i d\theta_i \int_0^{\Psi_{lim}} \sin^{D-2} \theta_{D-2} d\theta_{D-2} . \quad (\text{B.6})$$

Luego de un cálculo directo llegamos a

$$d\Psi_{lim}(D) = \frac{2 (\sqrt{\pi})^{D-1} \Psi_{lim}^{D-1}}{(D-1) \Gamma(D-1/2)} , \quad (\text{B.7})$$

y utilizando (4.3), (B.5) and (B.7) finalmente obtenemos

$$\omega_D = \frac{2 \Gamma(D/2) \Psi_{lim}^{D-1}}{\sqrt{\pi} (D-1) \Gamma(D-1/2)} . \quad (\text{B.8})$$

**Figuras correspondientes a los  
Capítulos 1 y 2.**

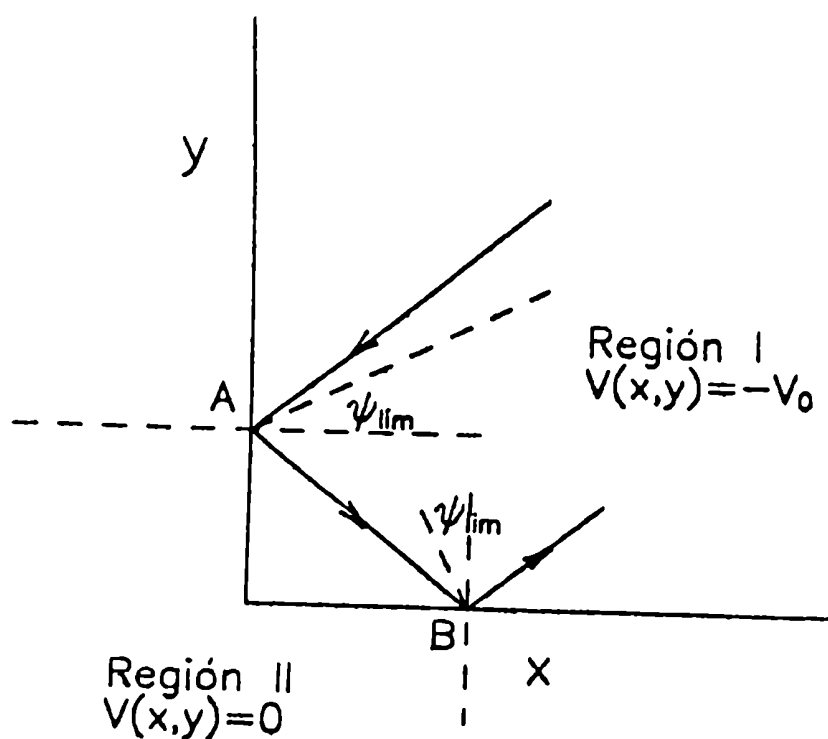


Figura 1: Partícula con energía total  $E > 0$  moviéndose en el plano  $x - y$ . En el primer cuadrante el potencial es  $V = -V_0$  (región I) mientras que  $V = 0$  en los otros (region II). La partícula puede penetrar en la región II ya que  $\psi_i < \psi_{lim}$  en A.

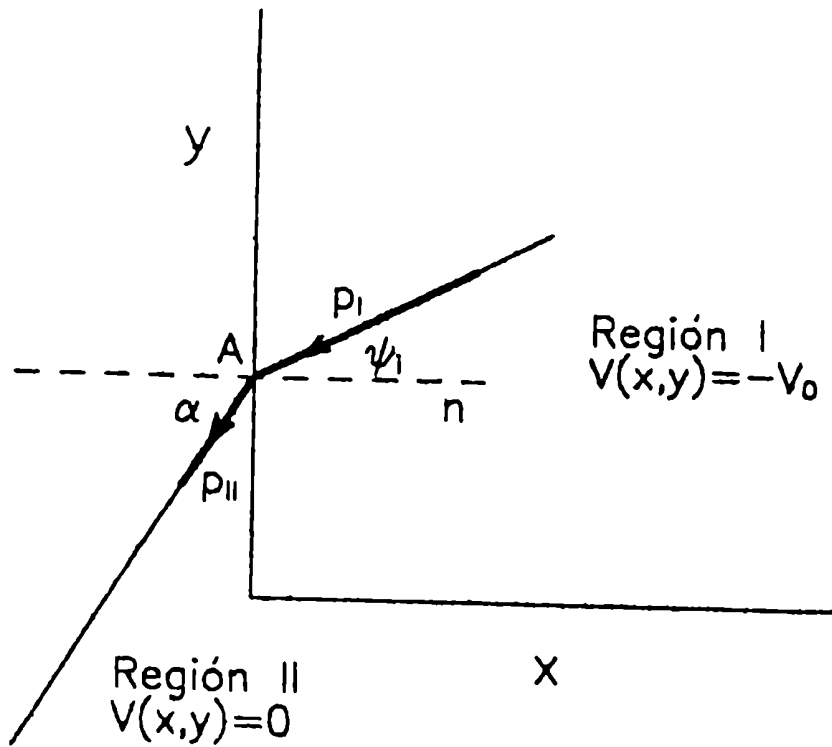


Figura 2: Situación análoga a la figura anterior, pero en este caso  $\psi_i > \psi_{lim}$  en A y B, por lo tanto la partícula es reflejada permaneciendo en la región II.

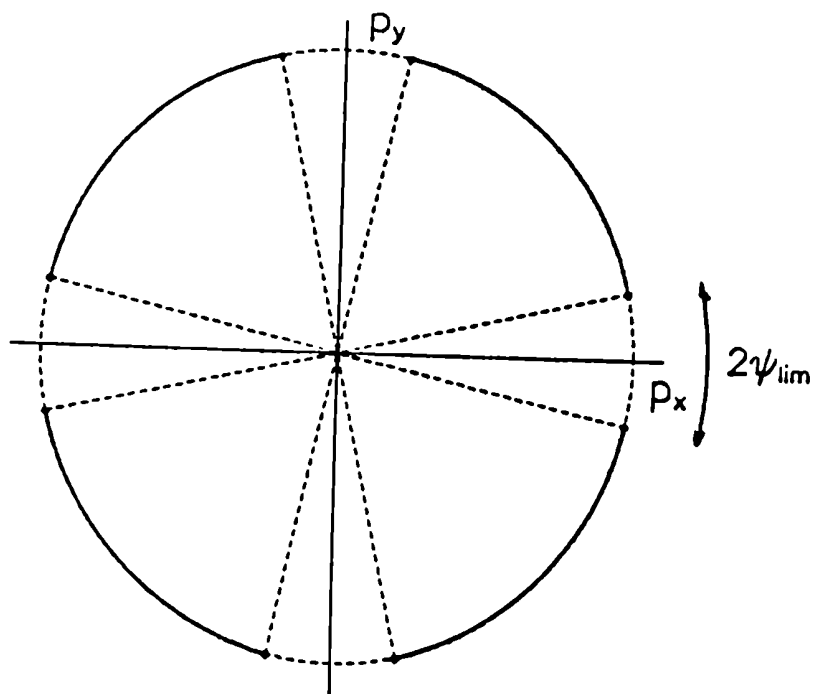


Figura 3: Espacio de momentos. El momento  $\vec{p}$  es un punto en la circunferencia de radio 1. Las longitudes de arco  $2\psi_{lim}$  cercanas a los ejes  $p_x$ ,  $p_y$  corresponden a las regiones libres (agujeros) mientras que el resto de la circunferencia corresponde a la región de billar.

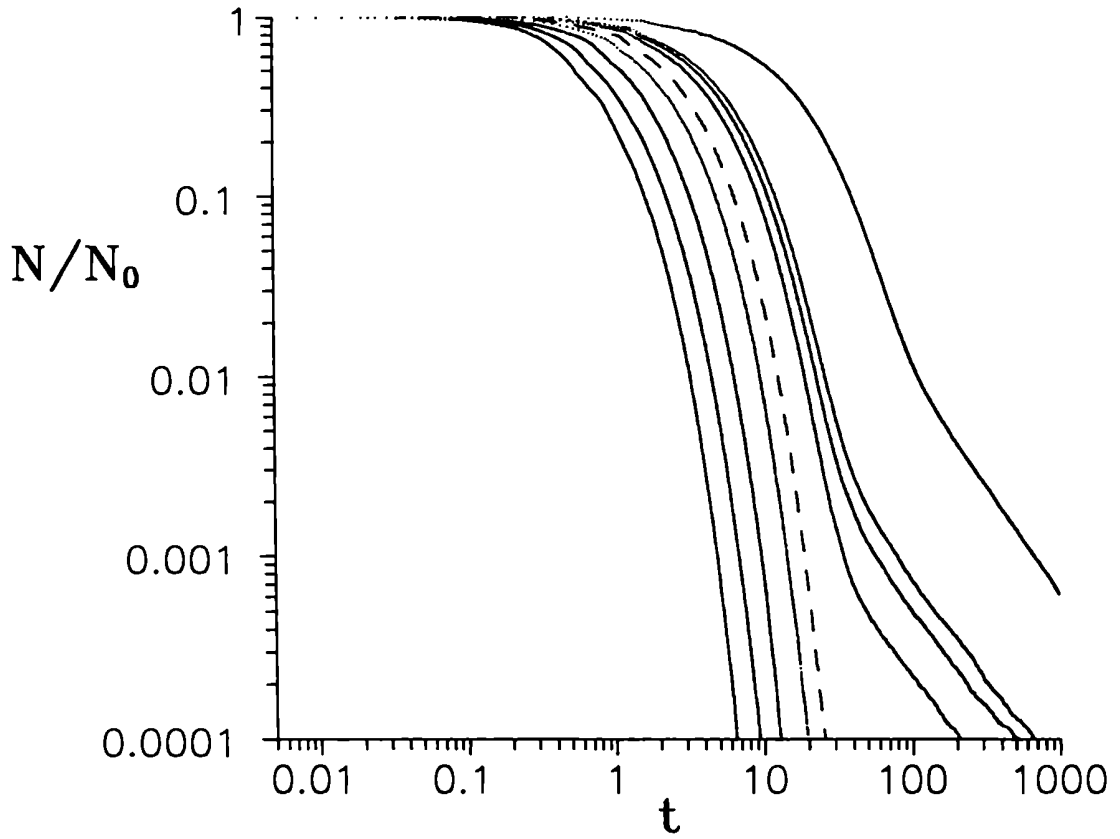


Figura 4: Resultados numéricos del decaimiento. El gráfico log-log muestra la población  $N/N_0$  vs.  $t$  para diferentes valores del radio  $R$  del dispersor circular (  $R = 0.499, 0.48, 0.45, 0.4, R_c, 0.3, 0.27, 0.25, 0.1$  ). La línea rayada corresponde a  $R_c = \sqrt{2}/4$  y separa el decaimiento puramente exponencial (a la izquierda) del exponencial con una cola algebraica para tiempos largos (a la derecha).

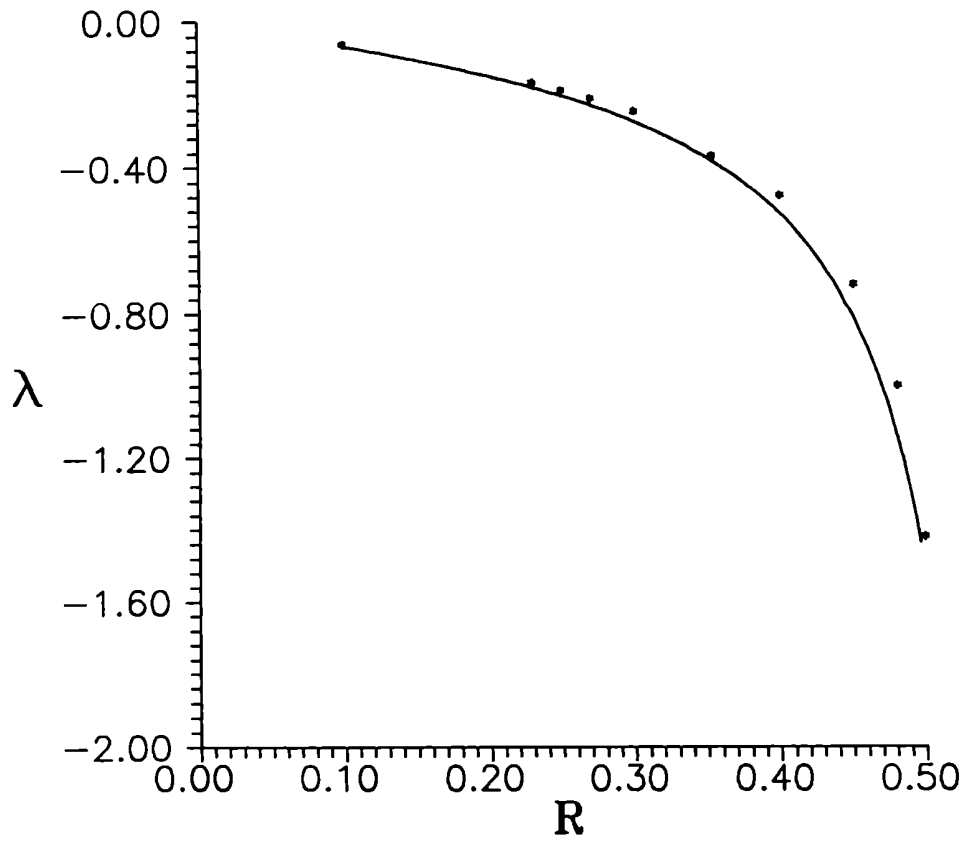


Figura 5: Constante del decaimiento exponencial  $\lambda$  vs.  $R$ . Los puntos corresponden a los exponentes obtenidos a través del mejor ajuste exponencial a los resultados numéricos. Para  $R > R_c$  hemos considerado toda la ley de decaimiento, mientras que para  $R < R_c$ , únicamente el tramo exponencial. La curva corresponde a los exponentes obtenidos a través de la teoría ergódica.



**Figuras correspondientes a los  
Capítulos 3 y 4.**

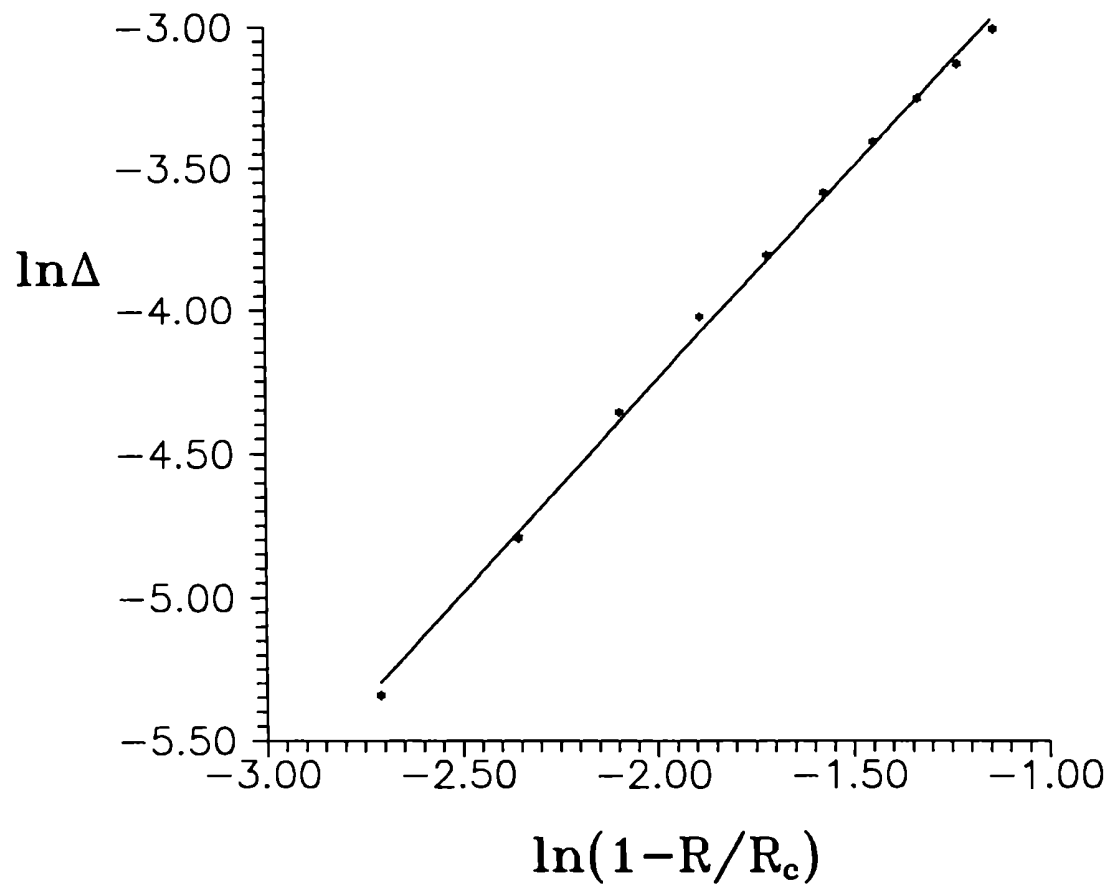


Figura 6: El mejor ajuste lineal para  $\log \Delta$  vs.  $\log(1 - R/R_c)$  determina  $\beta = 1.4776$  y  $\alpha = 0.2741$ .

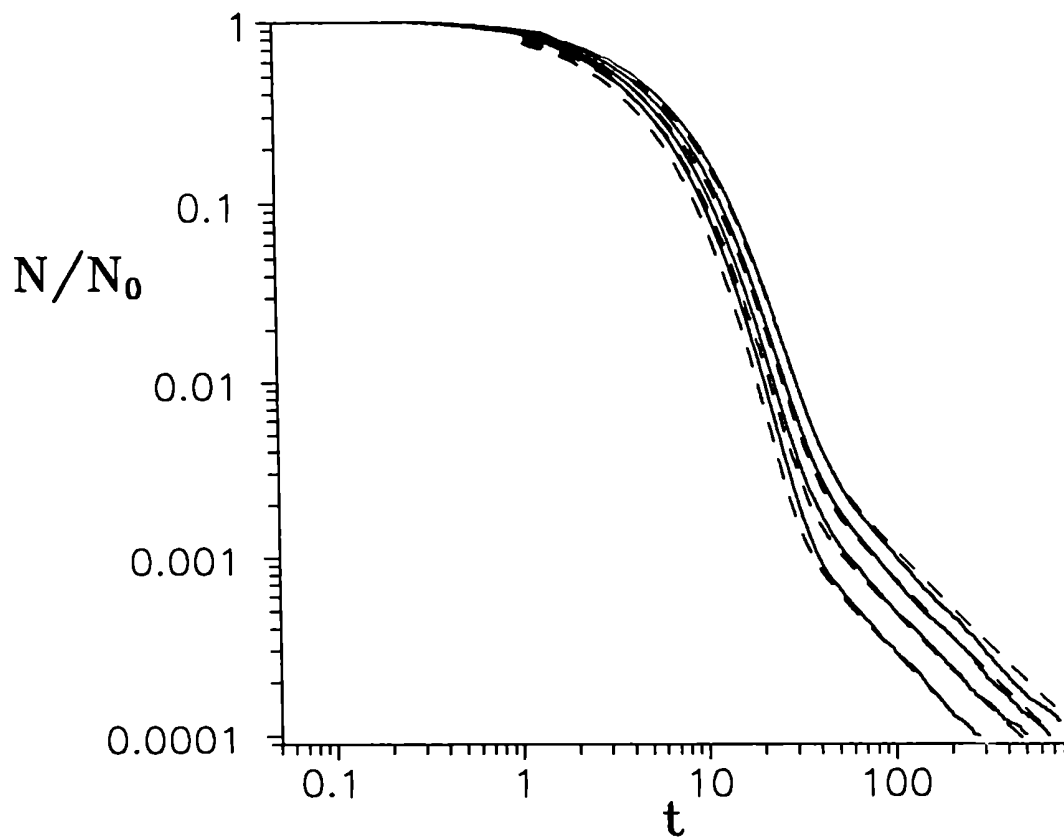


Figura 7: Ley de Decaimiento numérica (línea sólida) y ley obtenida utilizando la transformada inversa de Laplace de la expresión (3.17) (línea rayada) con  $\beta = 1.4776$  y  $\alpha = 0.2741$  para cuatro valores de radio ( $R = 0.23, 0.25, 0.27, 0.29$ ).

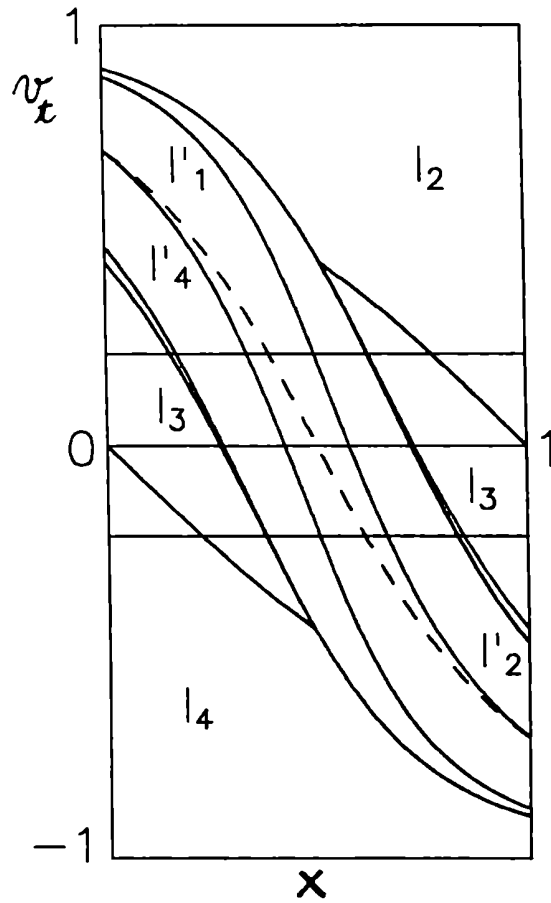


Figura 8: Superficie de Poincaré reducida a una cara. La línea horizontal corresponde a  $\pm \sin \psi_{lim}$  que separa la región libre de la de billar. Numerando los lados en sentido antihorario, los puntos en la región  $I_i$  corresponden a partículas que van a la cara  $i = 1, 2, 3, 4$  sin chocar con el dispersor circular. Los puntos en las regiones primadas  $I'_i$  corresponden a partículas que arriban a  $i$  pero chocando con el dispersor. Las pequeñas regiones entre  $I'_2 - I_3$  e  $I'_4 - I_3$  son  $I'_3$ .

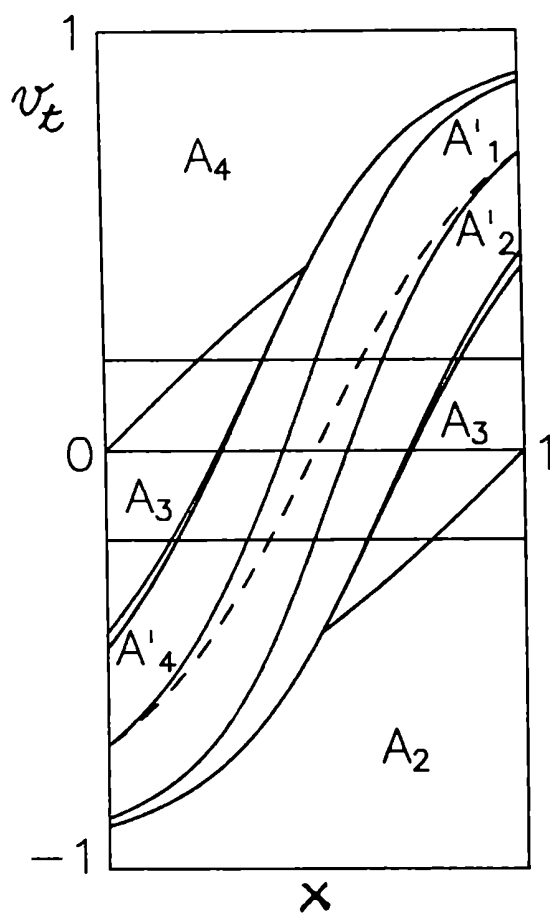


Figura 9: Superficie de Poincaré reducida a una cara. Las curvas aquí están definidas de acuerdo a la cara de la cual la partícula arriba. Los puntos en  $A_i$  corresponden a partículas que arriban de  $i$  sin chocar con el dispersor, mientras que los puntos en  $A'_i$  corresponden a partículas que llegan a  $i$  pero chocando con el dispersor. Las pequeñas regiones entre  $A'_2 - A_3$  y  $A'_4 - A_3$  son  $A'_3$ .

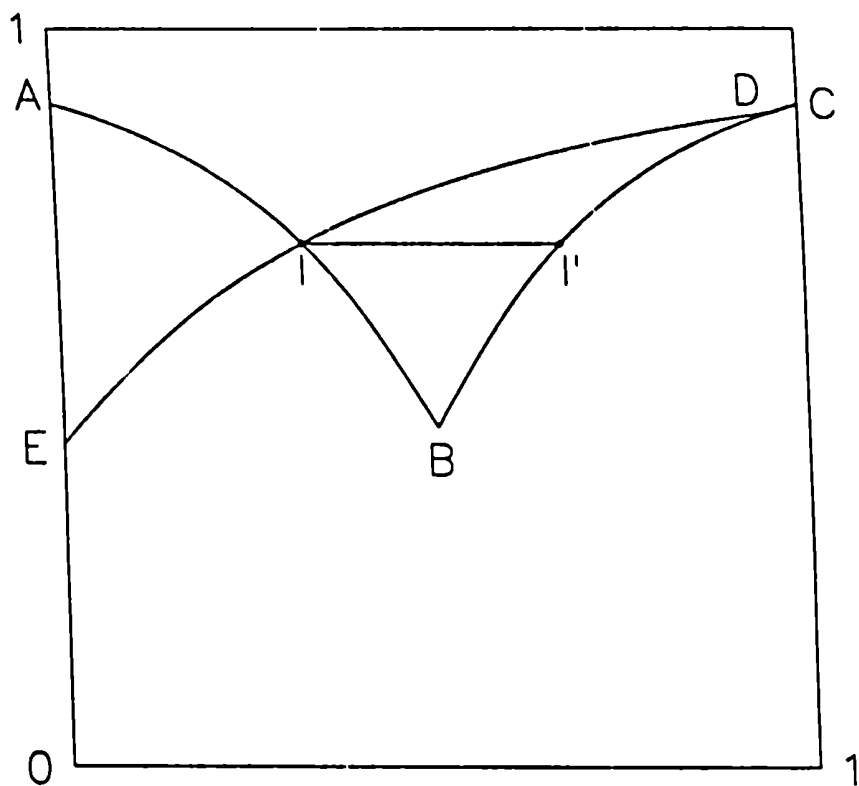


Figura 10: Area  $A_2 \cap A_4$  y el subconjunto invariante  $\overline{II'}$  correspondiente a la familia de órbitas parabólicas definidas por  $v_y/v_x = \pm 1$  para  $R = 0.23$ .

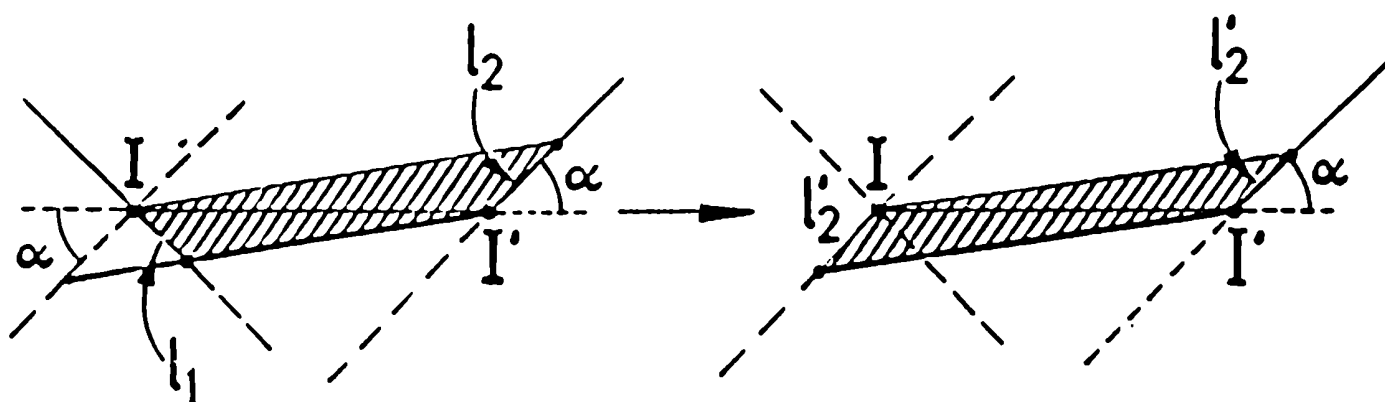


Figura 11: Transformación del área que permanece cerca del subconjunto invariante  $\overline{II'}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

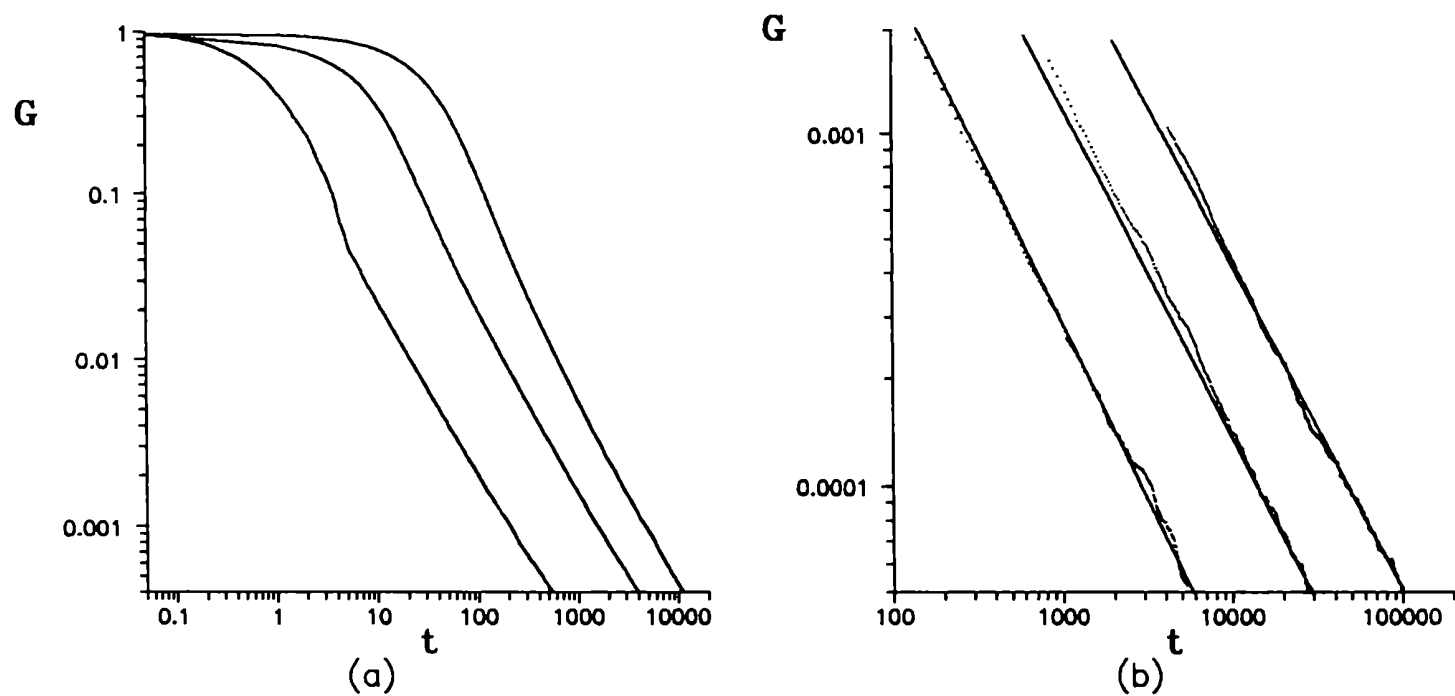


Figura 12: (a) Resultados numéricos de  $G$  para  $D = 2, 3, 4$ . El gráfico log-log muestra  $G$  vs.  $t$  para radio  $R = 0.23$  del dispersor circular. (b) La cola para tiempos largos conjuntamente con el mejor ajuste para  $G$  vs.  $t$  que resulta en un valor del exponente  $\delta = 1$  para  $D = 2, 3, 4$ .



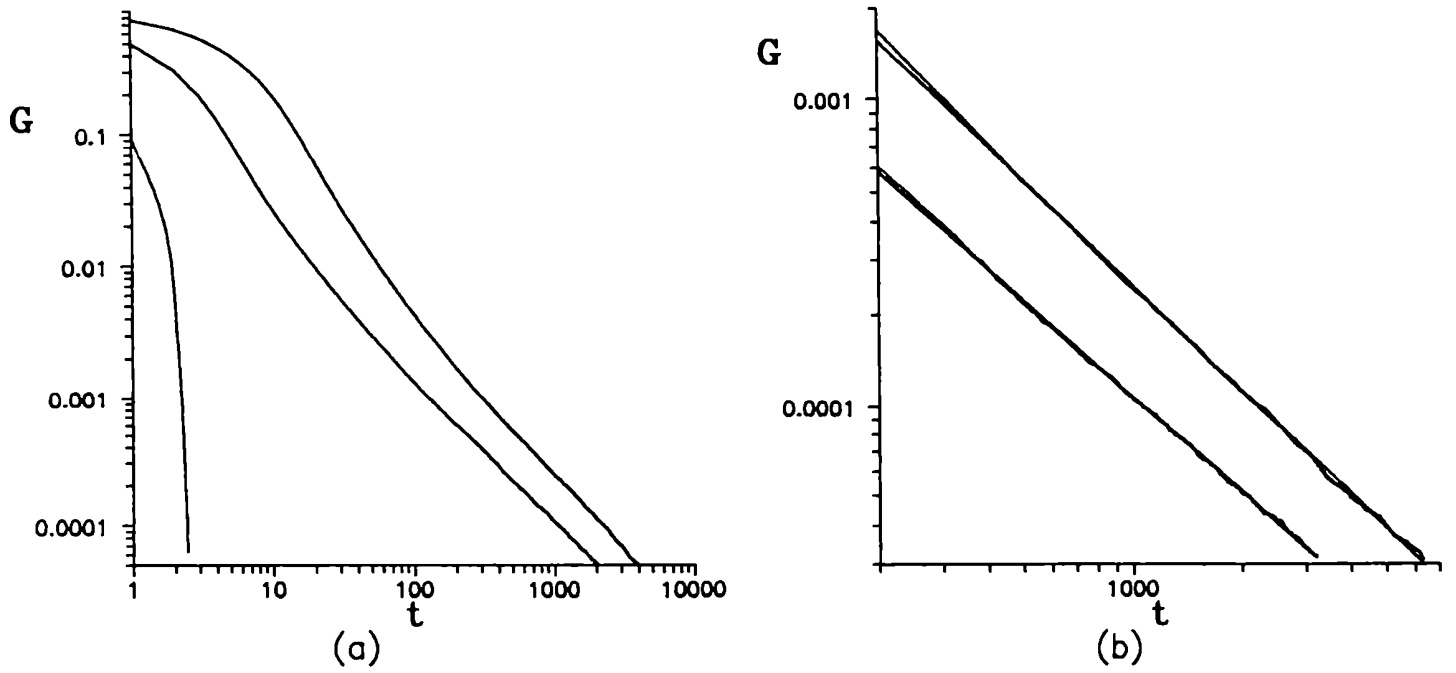


Figura 13: (a) Resultados numéricos de  $G$  para  $D = 2, 3, 4$ . El gráfico log-log muestra  $G$  vs.  $t$  para radio  $R = 0.4$  del dispersor circular. (b) La cola para tiempos largos conjuntamente con el mejor ajuste para  $G$  vs.  $t$  que resulta en un valor del exponente  $\delta = 1$  para  $D = 3, 4$ .

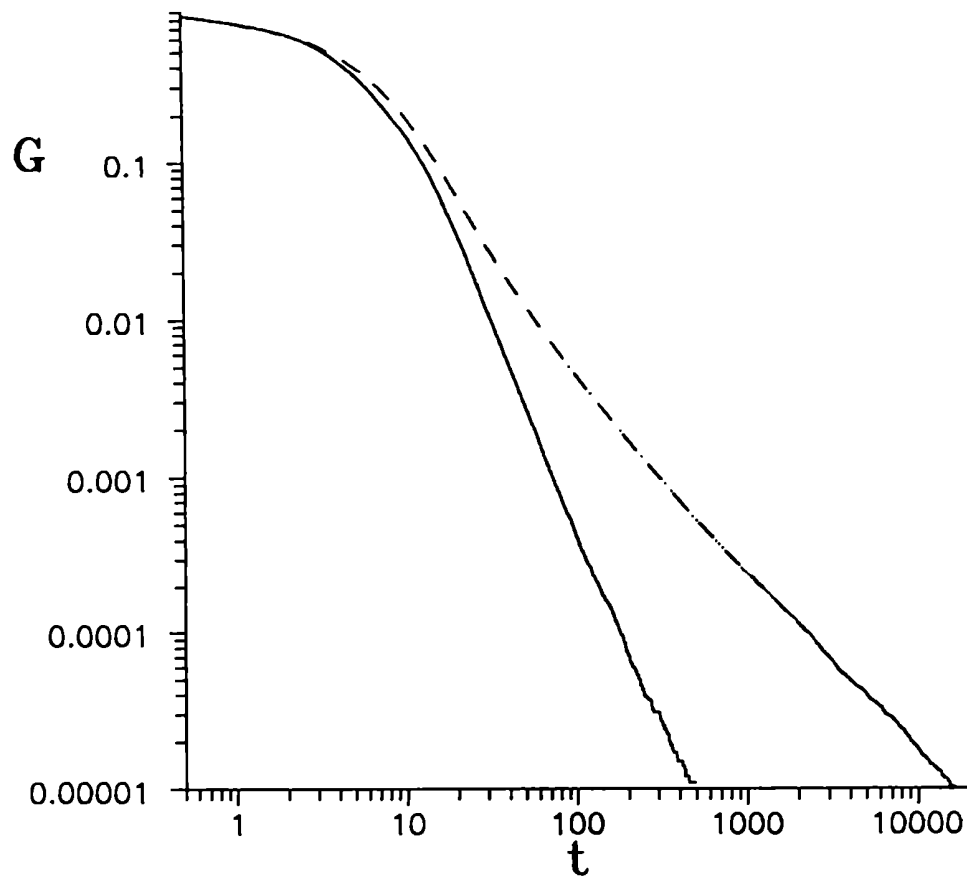


Figura 14: Resultados numéricos de  $G$  para  $D = 2, 3, 4$ . El gráfico log-log muestra  $G$  vs.  $t$  para radio  $R = 0.4$  del dispersor circular. La línea rayada corresponde a condiciones iniciales en todo el espacio de fases. La línea sólida resulta de no haber poblado ningún corredor principal. La cola algebraica es originada por los corredores escondidos. El mejor ajuste es consistente con un exponente  $\delta = 2$ .

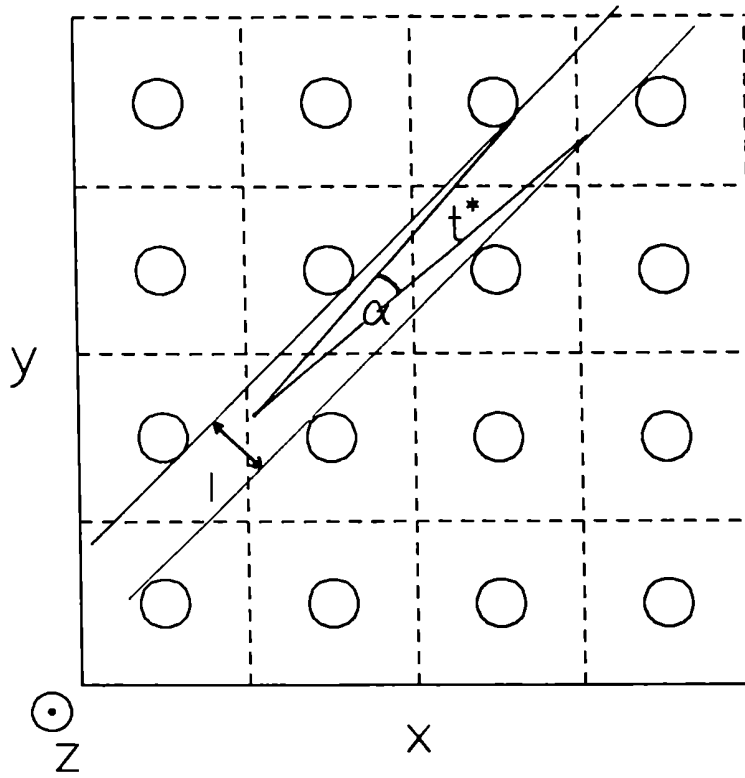


Figura 15: Configuración Periódica de centros dispersores en  $D = 3$  dimensiones, para un valor constante de la coordenada  $z$  correspondiente a cortar los centros dispersores esféricos por sus centros. El corredor principal definido por  $v_1/v_2 = 1$  y  $v_3$  cualquier valor consistente con  $|\vec{v}| = 1$ , es mostrado. El ancho del corredor es  $l$ , y el ángulo  $\alpha$  ( $\sim l/t^*$ ) resulta proporcional al número de condiciones iniciales que colisionará con algún dispersor en un tiempo  $t > t^*$ .

**Figuras correspondientes a los  
Capítulos 5 y 6.**

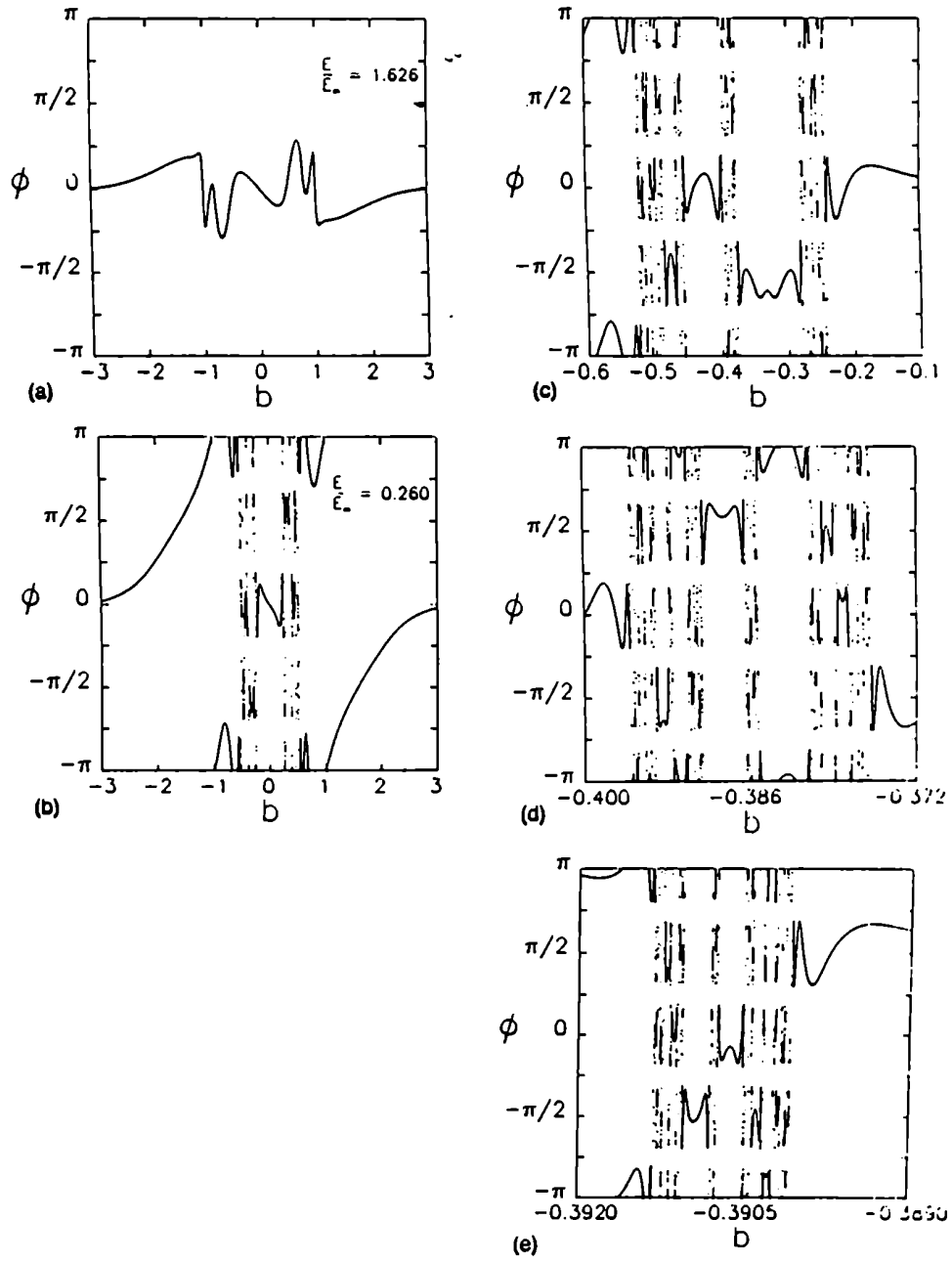


Figura 16:  $\Theta$  vs.  $b$  para el potencial  $V(x, y) = x^2 y^2 \exp[-(x^2 + y^2)]$ . (a) para  $E > E_m$  y (b) para  $E < E_m$ . (c)-(d) muestran ampliificaciones de la escala horizontal  $b$  para el caso  $E < E_m$  mostrado en (b). (extraída de [33]).

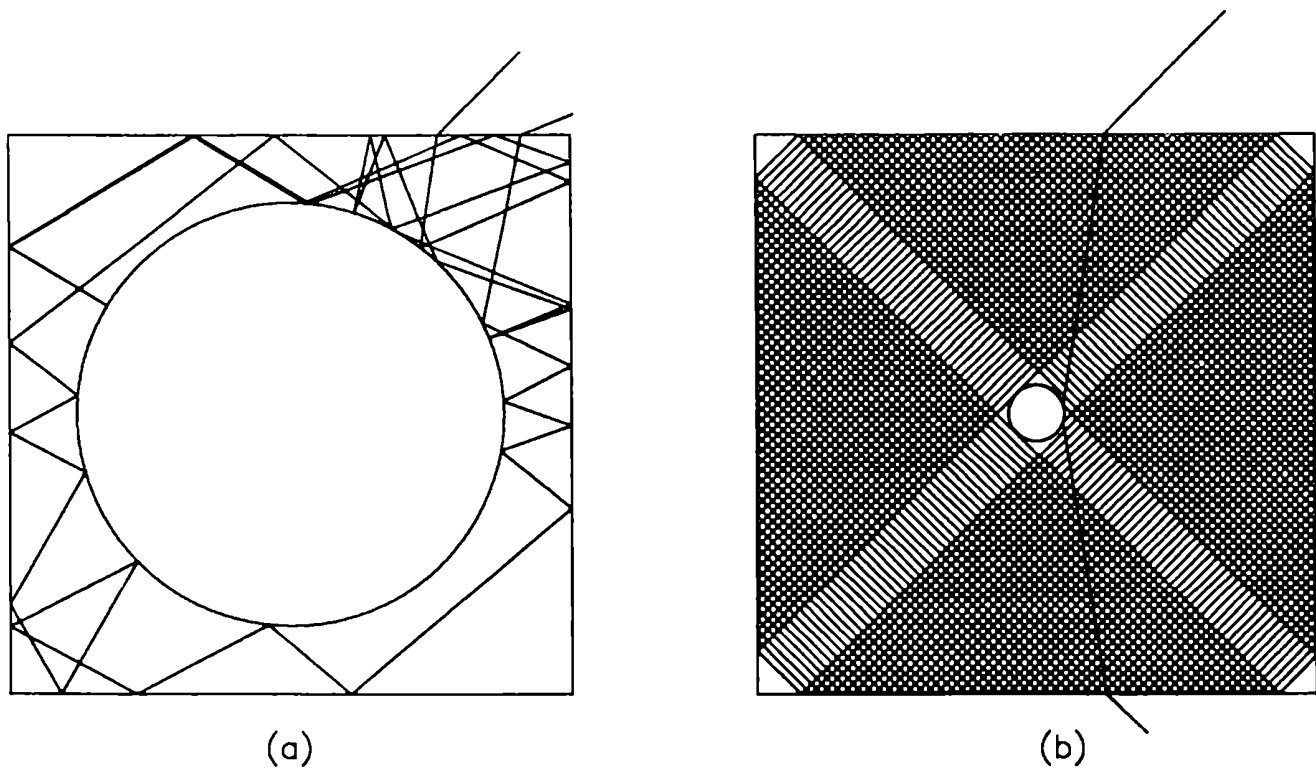


Figura 17: Dos órbitas en el experimento de dispersión: a)  $R > R_c$ . El conjunto invariante de órbitas periódicas es completamente hiperbólico. La dinámica está dominada por colisiones con el dispersor circular. b)  $R < R_c$ . El conjunto invariante incluye subconjuntos parabólicos. Por lo tanto puede haber movimiento interno caracterizado por reflexiones sobre las paredes del cuadrado.

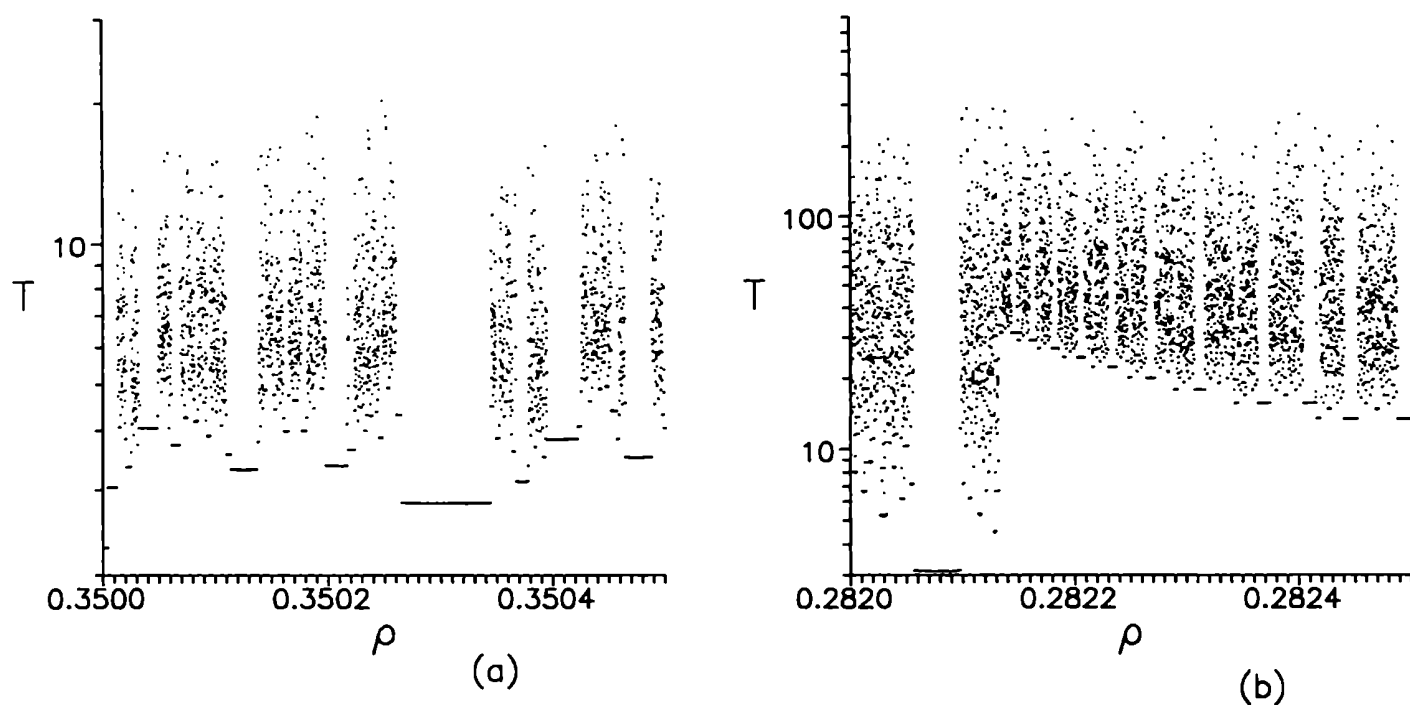


Figura 18: Logaritmo de la función de tiempos de retardo  $\ln\tau$  vs parámetro de impacto  $\rho$  correspondiente a conjunto atrapado a) completamente hiperbólico b) Incluye subconjunto parabólico.

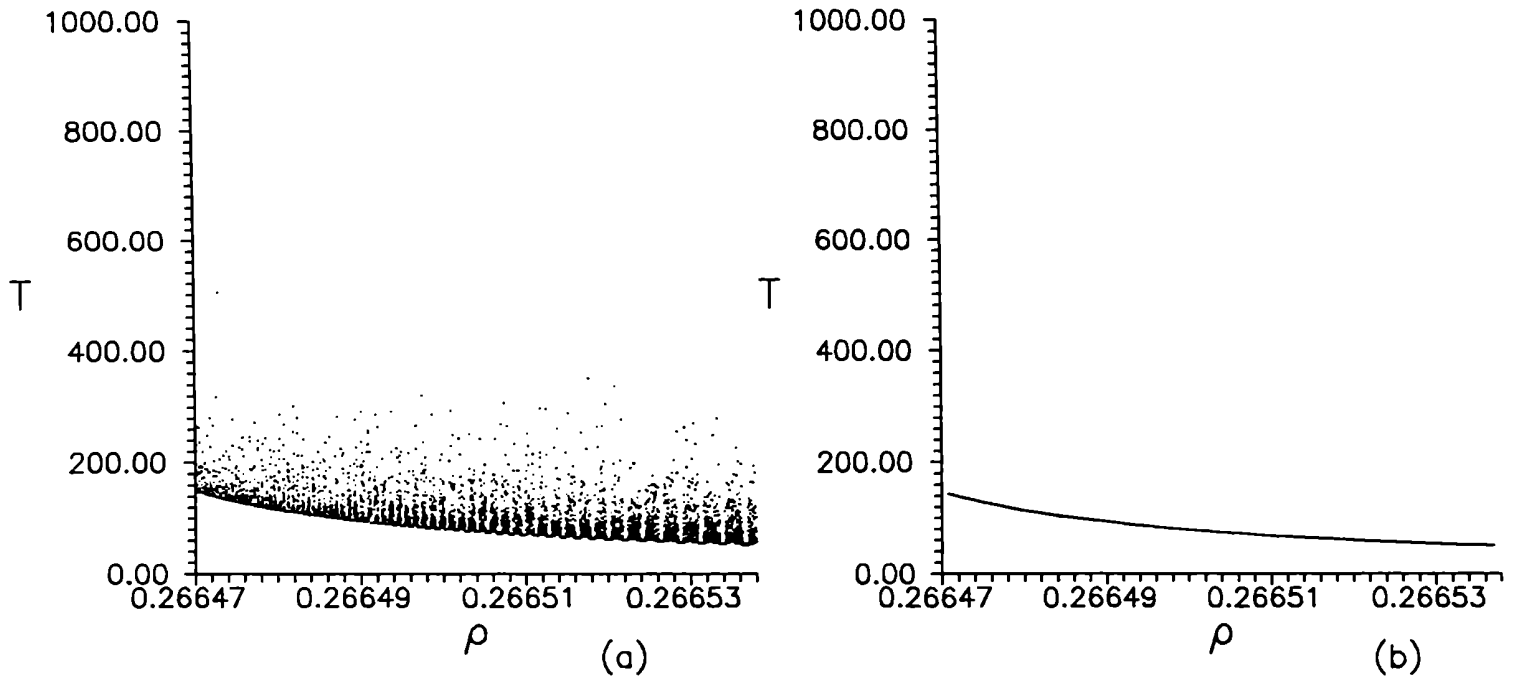


Figura 19: a) Porción de la función de tiempos de retardo correspondiente a una región de parámetros de impacto tales que la dinámica interna está dominada por el subconjunto parabólico de órbitas atrapadas  $v_y/v_x = 1$  y (b) el fondo regular predicho por (6.7) (ver texto) para  $R = 0.05$ ,  $\gamma_i = \pi/4$  y  $V_0/E = 20$ .



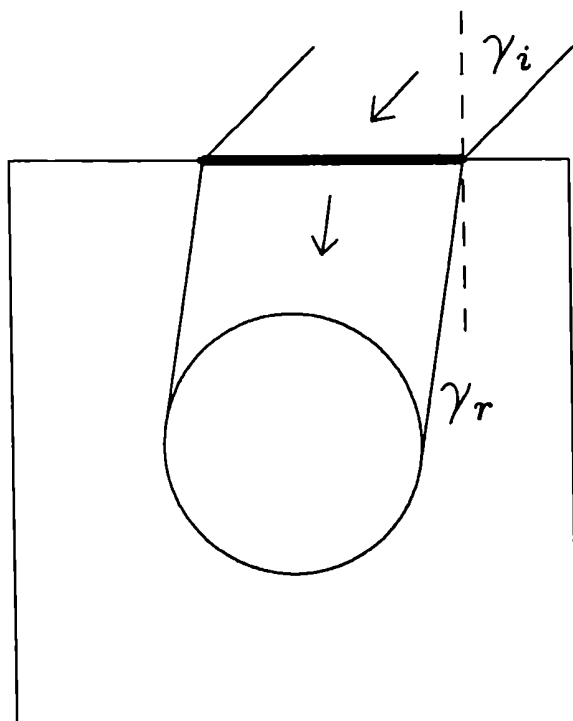


Figura 20: Pozo de potencial de Sinai, el haz (flechas), la región uniformemente poblada por el haz (línea gruesa) y los ángulos  $\gamma_i, \gamma_r$

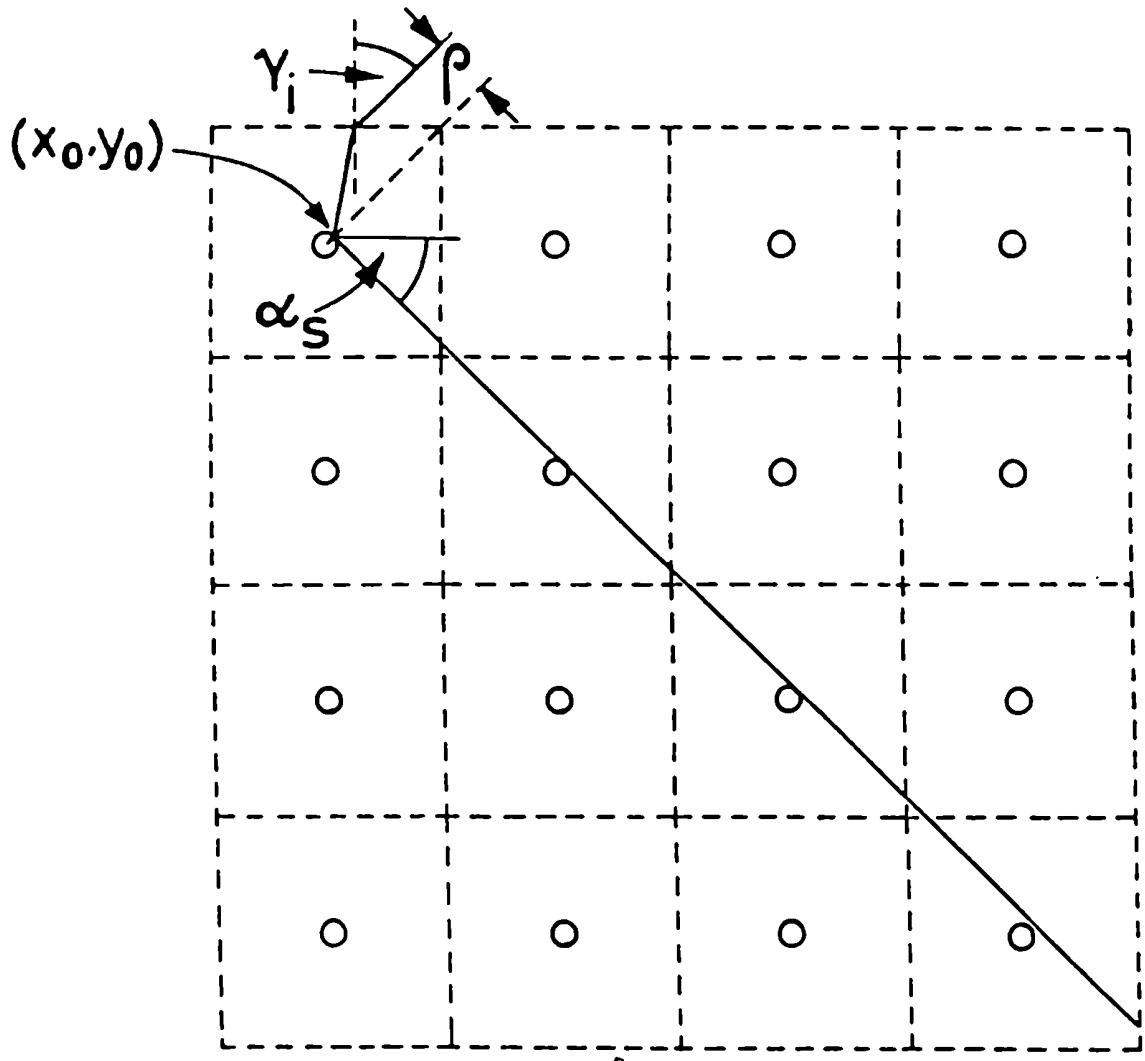


Figura 21: Experimentos de dispersión para la versión extendida del Pozo de Sinai.  $\gamma_i$  es el ángulo de incidencia,  $\rho$  es el parámetro de impacto,  $(x_0, y_0)$  es el punto de colisión con el dispersor,  $\alpha_s$  es el ángulo entre la velocidad después del choque y el eje  $x$ .

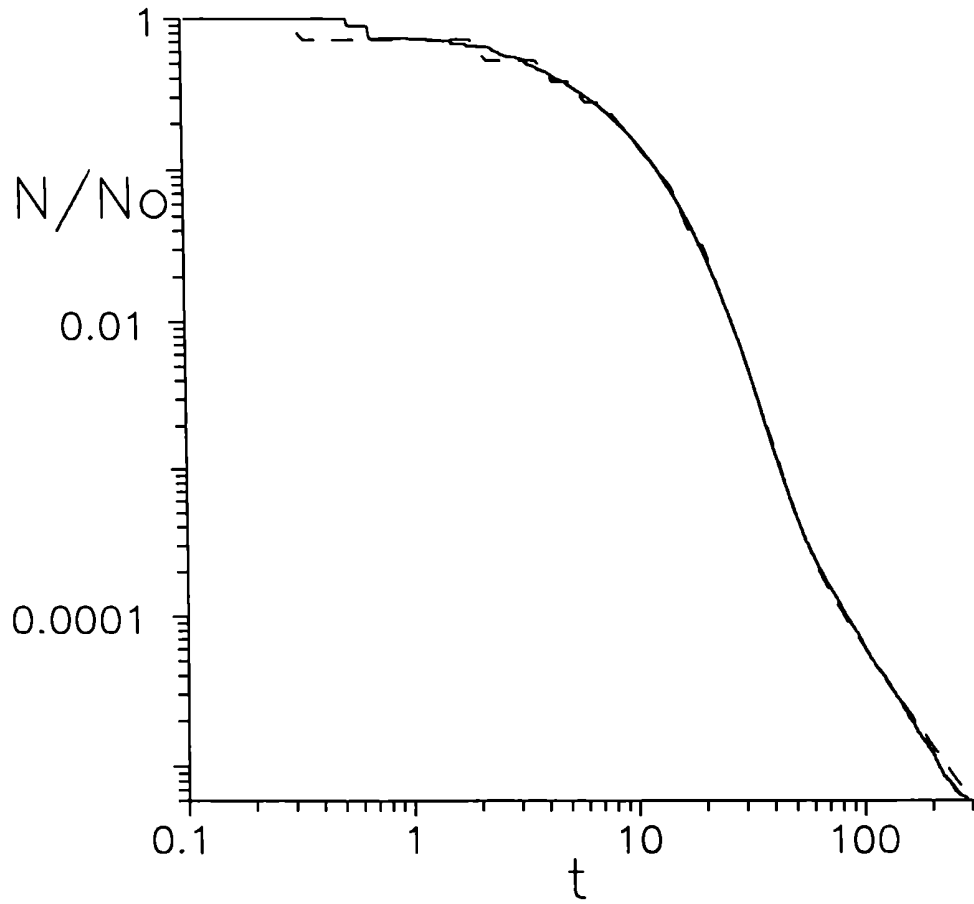


Figura 22: Población dentro del Pozo  $\ln N(t)/N_0$  vs.  $\ln t$ . La línea rayada corresponde al cálculo utilizando (6.19) mientras que la línea sólida corresponde al cálculo numérico.

# Bibliografía

- [1] S.Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer Verlag New York Inc. 1993.
- [2] A.J.Lichtenberg, M.A. Lieberman, *Regular and Stochastic Motion*, Springer Verlag New York Inc. 1983.
- [3] B.V.Chirikov, Phys. Rep. **52**, 265, (1979).
- [4] M.V.Berry, AIP Conference Proceedings **46**, 16, (1978).
- [5] U.Smilansky, *Lectures at Les Houches, Chaos and Quantum Physics*, editado por M.J.Giammoni, A.Voros y Zinn-Justin, Elsevier, Amsterdam, 1990.
- [6] W.Bauer and G.F.Bertsh, Phys. Rev. Lett. **65**, 2213, (1990).
- [7] Y.T.Lau, J.M.Finn, and E.Ott, Phys. Rev. Lett. **66**, 978, (1991).
- [8] P.Gaspard and S.A.Rice, J. Chem. Phys. **90**, 2225, (1989).
- [9] C.F.Hillermeier, R.Blümel and U.Smilansky, Phys. Rev. A **45**, 3486, (1992).
- [10] O.Legrand and D.Sornette, Phys. Rev. Lett. **66**, 2172, (1991); W.Bauer and G.F.Bertsh, Phys. Rev. Lett. **66**, 2173, (1991).
- [11] A.S.Pikovsky, J. Phys. A **25**, L477, (1992).

- [12] Ya.G.Sinai, Russ. Math. Surveys, **25**, 137, (1970).
- [13] C.M.Marcus, A.J.Rimberg, R.M.Westervelt, P.F.Hopkins and A.C.Gossard, Phys. Rev. Lett. **69**, 506, (1992).
- [14] H.Baranger, R.Jalabert and D.Stone, Chaos **3**, 1993.
- [15] M.V.Berry. Eur. J. Phys. **2**, 91, (1981).
- [16] J.D.Meiss, Chaos **2**, 267, (1992).
- [17] T.S.Gradshitein and J.M.Ryzhik, *Table of integrals, series and products*, Academic Press Inc. (1980).
- [18] A.Zacherl, T.Geisel, J.Nierwetberg and G.Radons, Phys. Lett. A **114**, 317, (1986).
- [19] J.P.Bouchaud and P.Le Doussal, J. Stat. Phys. **41**, 225, (1985).
- [20] B.Friedman and R.F.Martin Jr. Phys. Lett. A **105**, 23, (1984).
- [21] H.A.Lorentz, *The motion of electrons in metallic bodies*, Proc. Amst. Acad. 585, (1905).
- [22] L.A.Bunimovich and Ya.G.Sinai, Commun. Math. Phys. **78**, 247, (1980).
- [23] L.A.Bunimovich, Sov. Phys. JETP **62**, 842, (1985).
- [24] D.Chandler, *Introduction to Modern Statistical Mechanics*, Oxford University Press, 250, (1987).
- [25] P.M.Bleher, J. Stat. Phys. **66**, 315, (1992).
- [26] T.Geisel, J.Nierwetberg and A.Zacherl, Phys. Rev. Lett. **54**, 616, (1985).

- [27] J.P.Bouchaud and P.Le Doussal, *Physica D* **20**, 335, (1986).
- [28] A.J.Fendrik, A.Rivas and M.J.Sánchez, *Phys. Rev. E* **50**, 1948, (1994).
- [29] P.Scheunders and J.Naudts, *Phys. Rev. A* **41**, 3415, (1990).
- [30] P.Binder and D.Frenkel, *Phys. Rev. A* **42**, 2463, (1990).
- [31] N.I.Chernov, *J. Stat. Phys.* **74**, 11, (1994).
- [32] *Chaos Focus Issue on Chaotic Scattering*, editado por T.Tèl y E.Ott. *Chaos* **3**, 1993.
- [33] S.Bleher, C.Grebogi and E.Ott, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 919, (1989).
- [34] Z.Kovacs and T.Tèl, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1617, (1990).
- [35] J.D.Meiss and E.Ott, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2741, (1985).
- [36] Y.C.Lai, C.Grebogi, R.Blümel and M.Ding, *Phys. Rev. A* **45**, 8284, (1992).
- [37] A.J.Fendrik and M.J.Sánchez, a ser publicado en *J. Phys. A*.
- [38] M. Hénon, *Physica D*, **33**, 132, (1988).
- [39] H.Aref, N.Pomphrey, *Phys. Lett. A*, **78**, 297, (1980).
- [40] E.Pollak, P.Pechukas, *J. Chem. Phys.* **69**, 1218, (1980).
- [41] R.S.Dumont and P.Brumer, *J. Chem. Phys.* **90**, 96, (1989).
- [42] A.J.Fendrik and M.J.Sánchez, aceptado para su publicación en *Phys. Rev. E*.

## Agradecimientos

Deseo Agradecer:

A mi director Alejandro Fendrik por el tiempo y dedicación invertidos en nuestro trabajo.

A todos los que con su esfuerzo colaboran en transformar al departamento de física en un lugar donde es posible trabajar cómodamente. En especial a Guillermo Dussel, por su infinita energía.

A mis compañeros de trabajo, a Lucho por soportarme con hidalguía.

A los aguasverdes, por los años compartidos.

A mi familia, por estar siempre a mi lado.

A Gaba, por nuestra querida amistad. A Gabi y Ale, por sentir las muy cerca en los momentos difíciles.

A Diego, por todo lo que creo no hace falta que aquí te diga...